

Неравенство Иенсена

О.ИЖБОЛДИН, Л.КУРЛЯНДЧИК

ИСКУССТВОМ ДОКАЗЫВАТЬ неравенства овладеть далеко не просто. Тут требуется большой опыт, интуиция, и, как в каждом искусстве, умение свободно применять различные «технические» приемы. Мы продемонстрируем один из таких приемов на ряде примеров. В этой статье будут доказаны и классические неравенства (Коши, Коши – Буняковского, Гёльдера и Минковского), и менее знаменитые, но также весьма интересные.

Мы будем записывать формулы, как правило, коротко, с помощью обозначений

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Советуем тем, кто еще не научился ими пользоваться, расписывать выкладки более подробно.

Выпуклые множества

В основе доказательств неравенств, о которых будет идти речь, лежит понятие выпуклости. Это очень важное математическое понятие, и вы с ним уже встречались в школьном курсе геометрии при изучении многоугольников. Однако в математике понятие выпуклости связано не только с многоугольниками. Фигуру называют выпуклой, если с любыми

Опубликовано в «Кванте» №4 за 1990 год.

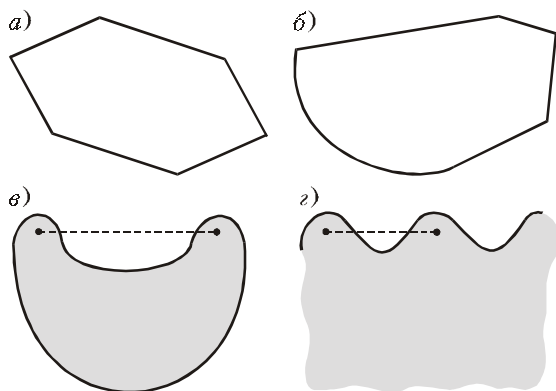


Рис.1

двумя своими точками она содержит весь отрезок с концами в этих точках. На рисунке 1 показаны примеры выпуклых и невыпуклых фигур. Выпуклые фигуры обладают многими замечательными свойствами, но нас будет интересовать лишь одно из них. Сформулируем его:

Пусть в точках A_1, A_2, \dots, A_n выпуклой фигуры Φ сосредоточены массы m_1, m_2, \dots, m_n соответственно. Тогда центр масс этих точек также принадлежит фигуре Φ .

Из физики известно, что центр масс плоской фигуры – это точка с координатами

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right), \quad (1)$$

где x_i, y_i – координаты точки A_i .

Упражнения

1. Докажите, что центр масс двух точек лежит на отрезке, их соединяющем.
2. Докажите, что центр масс n точек лежит на отрезке, соединяющем любую из них с центром масс остальных.

Выпуклые функции

Нарисуем график функции $y = x^2$ (рис.2,а).

Мы видим, что надграфик этой функции (на рисунке он закрашен красным цветом) является выпуклой фигурой. Если же рассмотреть функцию $y = \sin x$ ($x \in [0; \pi]$), то ее надграфик (на рисунке 2,б он закрашен красным цветом) вы-

пуклым не является. Однако выпуклым является подграфик этой функции (на том же рисунке он закрашен синим цветом).

Эти наблюдения приводят к важному определению:

Если надграфик функции является выпуклой фигурой, то говорят, что эта функция выпуклая, а если выпуклым является подграфик, то говорят, что функция вогнутая¹.

Тем самым, функция $y = x^2$ является выпуклой, а функция $y = \sin x$ ($x \in [0; \pi]$) – вогнутой.

Основное неравенство

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство Иенсена². Все классические неравенства, упомянутые в начале статьи, являются его следствием.

Теорема (неравенство Иенсена). Пусть $y = f(x)$ – функция, выпуклая на некотором интервале, x_1, x_2, \dots, x_n – произвольные числа из этого интервала, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n). \quad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ точки A_1, A_2, \dots, A_n с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n . Расположим в этих точках грузы с массами m_1, m_2, \dots, m_n .

¹ В некоторых учебниках принята другая терминология.

² Иенсен Йоганн Людвиг (1859–1925) – датский математик.

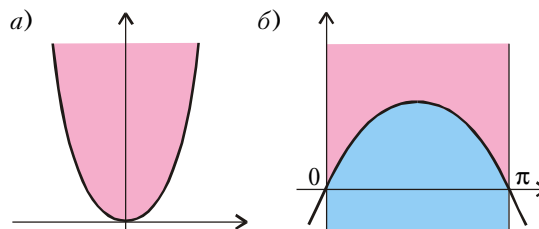


Рис.2

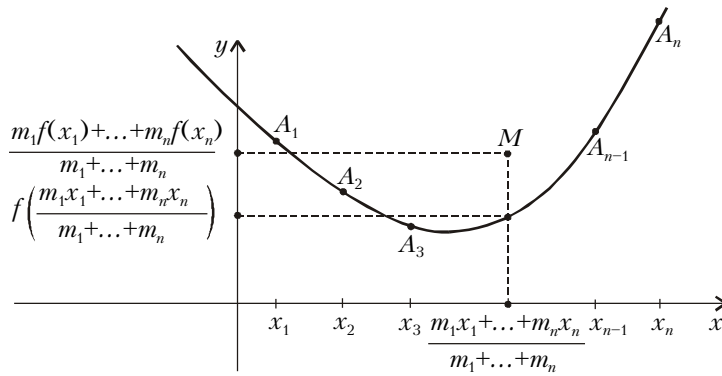


Рис.3

Центр масс этих точек имеет координаты

$$\left(\frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}; \frac{m_1 f(x_1) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + \dots + m_n} \right).$$

Так как точки A_1, A_2, \dots, A_n принадлежат надграфику выпуклой функции, то и их центр масс также принадлежит надграфику (ибо надграфик — выпуклая фигура). А это означает, что ордината центра масс

M не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой (рис.3), т.е.

$$f\left(\frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}\right) \leq \frac{m_1 f(x_1) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + \dots + m_n}. \quad (3)$$

Для завершения доказательства остается положить $m_1 = \alpha_1, \dots, m_n = \alpha_n$.

Этот пункт статьи мы хотим закончить двумя важными замечаниями.

Во-первых, в процессе доказательства неравенства Иенсена (2) мы доказали неравенство (3). На самом деле эти неравенства равносильны. Положив в неравенстве (2) $\alpha_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), мы получаем неравенство (3). Поэтому естественно оба эти неравенства называть неравенствами Иенсена. Неравенство (2) выглядит более компактно, однако для приложений удобнее пользоваться неравенством (3). Во-вторых, если функция $f(x)$ вогнутая, то для нее неравенства Иенсена (2) и (3) меняются на противоположные. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть выпуклую функцию $-f(x)$.

Неравенство Коши—Буняковского

На первый взгляд, неравенство Иенсена не производит особого впечатления: слишком общо выглядит формулировка. Прочитав статью до конца, вы убедитесь, что это впечатление обманчиво.



Продemonстрируем силу неравенства Иенсена на конкретном примере. А именно, докажем знаменитое неравенство Коши — Буняковского

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ — произвольные положительные числа.

Доказательство. Как мы знаем, функция $y = x^2$ — выпуклая. Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n} \right)^2 \leq \frac{m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2}{m_1 + \dots + m_n} \quad (m_i > 0).$$

Следовательно,

$$(m_1 x_1^2 + \dots + m_n x_n^2)(m_1 + \dots + m_n) \geq (m_1 x_1 + \dots + m_n x_n)^2.$$

Положив $m_i = b_i^2, x_i = \frac{a_i}{b_i}$, получим требуемое неравенство.

Упражнение 3. Докажите неравенство Коши — Буняковского для произвольных вещественных чисел a_i, b_i .

Примеры выпуклых функций

Для успешного применения неравенства Иенсена необходим простой критерий, позволяющий определять, является ли данная функция выпуклой.

Теорема. Пусть $y = f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Если ее вторая производная положительна, то функция выпукла, а если вторая производная отрицательная, то функция вогнута.

Мы не будем аккурратно доказывать эту теорему, поясним только ее геометрический смысл. Пусть $f''(x) > 0$ для всех x . Очевидно, что надграфик окажется выпуклым, если график функции в каждой точке «поворачивает» вверх относительно касательной в этой точке. На языке формул это означает, что если $l(x)$ — линейная функция, график которой — касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(a, f(a))$, то $f(x) > l(x)$ при всех x , достаточно близких к a и отличных от a .

Чтобы вывести неравенство $f(x) > l(x)$ из неравенства $f''(a) > 0$, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $g(x)$ — такая функция, что $g(a) = g'(a) = 0$ и $g''(a) > 0$. Тогда при всех x , достаточно близких к a и отличных от a , $g(x) > 0$. Это понятно с физической точки зрения: если покоящемуся телу (скорость $g'(a) = 0$) придать положительное ускорение (ускорение $g''(a) > 0$), то тело начнет перемещаться в положительном направлении.

Рассмотрим теперь функцию $g(x) = f(x) - l(x)$. Поскольку графики функции $f(x)$ и $l(x)$ проходят через одну точку и имеют в ней одинаковый наклон, $g(a) = g'(a) = 0$. Кроме того, $g''(x) = f''(x)$, так как вторая производная линейной функции $l(x)$ равна нулю. Значит, $g''(a) > 0$ и, согласно сказанному в предыдущем абзаце, $g(x) > 0$ при x , достаточно близких к a . Это и значит, что $f(x) > l(x)$. Случай $f''(x) < 0$ рассматривается аналогично.

Пользуясь теоремой, мы «запасемся» несколькими выпуклыми и вогнутыми функциями. От вас при этом требуется умение вычислять производные.

Примеры

1. $y = x^\alpha$ ($x > 0$).

Так как $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$, то при $0 < \alpha < 1$ функция вогнутая, а при $\alpha < 0$ и $\alpha > 1$ — выпуклая.

2. $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

Так как $y'' = a^x \ln^2 a > 0$, то функция выпуклая.

3. $y = \log_a x$ ($x > 0, a > 0, a \neq 1$).

Так как $y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a}$, то при $a < 1$ функция выпуклая, а при $a > 1$ — вогнутая.

4. $y = \ln(1 + e^x)$.

Так как $y'' = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$, то эта функция выпуклая.

5. $y = x \ln x$.

Так как $y'' = \frac{1}{x} > 0$, то функция выпуклая.

6. $y = (1 + x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ ($x > 0$).

Так как $y'' = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}(1 + x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}$, то при $\alpha < 1$ функция вогнутая, а при $\alpha > 1$ — выпуклая.

Теперь мы можем доказать несколько классических неравенств.

Неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (x_i > 0).$$

Доказательство. Прологарифмируем обе части этого неравенства:

$$\ln \left(\frac{1}{n} x_1 + \dots + \frac{1}{n} x_n \right) \geq \frac{1}{n} \ln x_1 + \dots + \frac{1}{n} \ln x_n.$$

Полученное неравенство напоминает нам неравенство Иенсена, однако знак неравенства «смотрит не туда». Объясняется это тем, что функция $\ln x$ не выпуклая, а вогнутая (пример 3).

Неравенство Гёльдера

Пусть p, q — положительные числа, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Доказательство. Ясно, что $p > 1$, поэтому функция $y = x^p$ — выпуклая (пример 1). Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \right)^p \leq \frac{\sum m_i x_i^p}{\sum m_i}.$$

Отсюда

$$\sum m_i x_i \leq (\sum m_i)^{\frac{p-1}{p}} (\sum m_i x_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$, и поэтому

$$\sum m_i x_i \leq (\sum m_i x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum m_i)^{\frac{1}{q}}.$$

Положив теперь $m_i = b_i^q, x_i = a_i b_i^{1-q}$, получаем требуемое неравенство.

Неравенство Минковского

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \dots \cdot b_n} &\leq \\ &\leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \dots \cdot (a_n + b_n)} \\ &\quad (a_i, b_i > 0). \end{aligned}$$

Доказательство. Поделив обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$,

получим

$$1 + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ясно, что дробь $\frac{b_i}{a_i}$ имеет смысл как-то обозначить. Но на самом деле удобнее ввести обозначение не для самой дроби $\frac{b_i}{a_i}$, а для ее логарифма: $x_i = \ln \frac{b_i}{a_i}$. Итак, заменив $\frac{b_i}{a_i}$ на e^{x_i} , мы запишем наше неравенство в виде

$$1 + e^{\frac{\sum x_i}{n}} \leq \prod (1 + e^{x_i})^{\frac{1}{n}}.$$

Прологарифмируем обе части получившегося неравенства:

$$\ln \left(1 + e^{\frac{\sum x_i}{n}}\right) \leq \frac{1}{n} \ln \left(\prod (1 + e^{x_i})\right).$$

В последнем неравенстве мы узнаем неравенство Иенсена для выпуклой функции $y = \ln(1 + e^x)$ (пример 4).

Несколько примеров использования неравенства Иенсена

Задача 1. Докажите неравенство

$$\prod a_i^{a_i} \geq \left(\sum \frac{1}{n} a_i\right)^{\sum a_i} \quad (a_i > 0).$$

Решение. Прологарифмировав обе части неравенства и разделив на n , получим

$$\sum \frac{1}{n} a_i \ln a_i \geq \left(\sum \frac{1}{n} a_i\right) \ln \sum \frac{1}{n} a_i.$$

А это — неравенство Иенсена для выпуклой функции $y = x \ln x$ (пример 5).

Задача 2. Докажите неравенство

$$\sqrt{(\sum a_i)^2 + (\sum b_i)^2} \leq \sum \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Решение. Напишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y = \sqrt{1 + x^2}$ (пример (6)):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right)^2} \leq \frac{\sum m_i \sqrt{1 + x_i^2}}{\sum m_i}.$$

Домножив обе части неравенства на $\sum m_i$, получим

$$\sqrt{(\sum m_i)^2 + (\sum m_i x_i)^2} \leq \sum m_i \sqrt{1 + x_i^2} = \sum \sqrt{m_i^2 + (m_i x_i)^2}.$$

Остается только положить $m_i = a_i$,

$$x_i = \frac{b_i}{a_i}.$$

В заключение рассмотрим довольно трудную задачу, которую тоже можно решить при помощи неравенства Иенсена.

Задача 3. Докажите неравенство

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3} + \frac{p_2}{p_3 + p_4} + \frac{p_3}{p_4 + p_5} + \frac{p_4}{p_5 + p_1} + \frac{p_5}{p_1 + p_2} \geq \frac{5}{2} \quad (p_i > 0).$$

Решение. Для удобства введем дополнительные переменные p_6 и p_7 , равные p_1 и p_2 соответственно. Теперь данное неравенство можно записать коротко:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{p_i}{p_{i+1} + p_{i+2}} \geq \frac{5}{2}.$$

Выпишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y = \frac{1}{x}$ (пример 1):

$$\left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right)^{-1} \leq \frac{\sum m_i x_i^{-1}}{\sum m_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum \frac{m_i}{x_i} \geq \frac{(\sum m_i)^2}{\sum m_i x_i}.$$

Положим теперь $m_i = p_i$, $x_i = p_{i+1} + p_{i+2}$:

$$\sum \frac{p_i}{p_{i+1} + p_{i+2}} \geq \frac{(\sum p_i)^2}{\sum p_i (p_{i+1} + p_{i+2})}.$$

Тем самым, достаточно доказать неравенство

$$\frac{(\sum p_i)^2}{\sum p_i (p_{i+1} + p_{i+2})} \geq \frac{5}{2}.$$

Избавившись от знаменателей и раскрыв скобки, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} 2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) &\geq \\ &\geq p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_1 p_5 + \\ &+ p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_4 + \\ &+ p_3 p_5 + p_4 p_5. \end{aligned}$$

Так как правая часть равна

$$\frac{1}{2} \left((p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \right),$$

то неравенство можно переписать в виде

$$5(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \geq (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2.$$

Записав это в виде

$$\begin{aligned} (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \times \\ \times (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) &\geq \\ \geq (1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 + 1 \cdot p_5)^2, \end{aligned}$$

мы обнаруживаем частный случай неравенства Коши — Бунаковского.

Упражнения

Докажите неравенства:

4. $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p < n^{p-1} \sum_{i=1}^n x_i^p$ при $p > 1$,

$x_i > 0$.

5. $\sum_{i=1}^n a_i^p \cdot \sum_{i=1}^n b_i^p \geq n^{2-p} \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^p$ при

$p \geq 2$, $a_i, b_i > 0$.

6. $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1}$, где

$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и $a_i > 0$.

7. $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$ при $a, b, c > 0$.

8. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq$

$\geq 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$ при $a, b, c > 0$.

9. $\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1-x_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (1-x_i)\right)^n}$ при

$0 < x_i < \frac{1}{2}$.

10. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$ при

$a, b, c, d > 0$.

11. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} +$

$+ \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3$ при $a, b, c, d, e, f > 0$.