Топологическое самодействие

Ю.ГРАЦ

Физика XX века пережила несколько периодов, каждый из которых приводил к необходимости кардинального пересмотра наших представлений о физической картине мира. Один из них связан с именем А.Эйнштейна, создавшего специальную, а затем и общую теорию относительности и заставившего по-новому взглянуть на такие фундаментальные понятия, как пространство и время.

Как известно, в конце XVII века И.Ньютон сформулировал основы *классической* картины мира, базирующейся на трех законах механики материальной точки и на законе всемирного тяготения. Согласно последнему, гравитирующие частицы притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. При этом все события в физи-

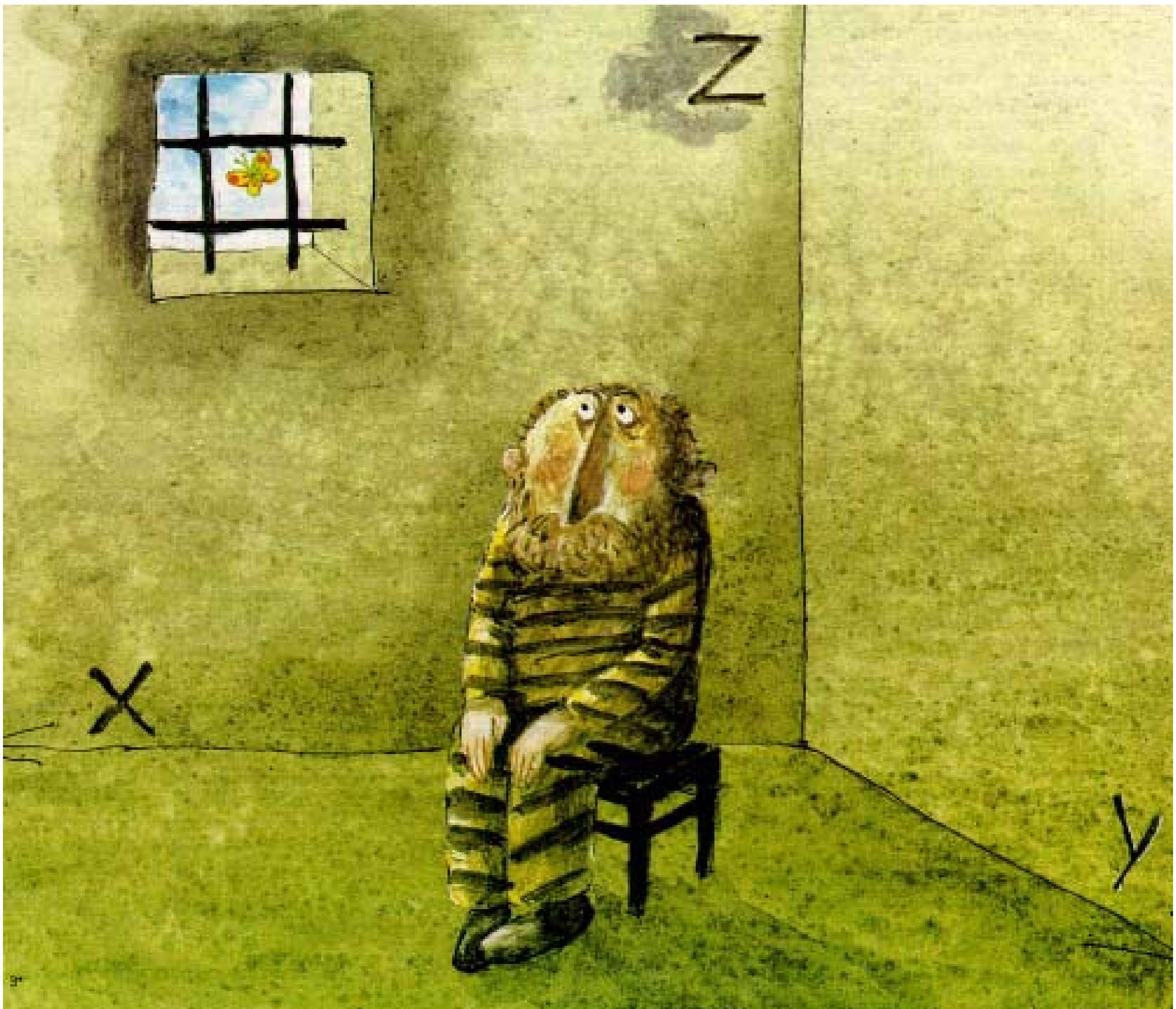

Иллюстрация П. Чернуского

ческом мире разворачиваются в трехмерном евклидовом пространстве, а время считается абсолютным, т.е. одинаковым для всех инерциальных наблюдателей. Введенные Ньютоном понятия *абсолютного пространства* и *абсолютного времени*, свойства которых всегда одинаковы безотносительно к чему-либо внешнему, укоренились и господствовали в физике вплоть до XX века.

Что же сделал Эйнштейн? Исходя из факта равенства инертной и гравитационной масс, он пришел к заключению, что падение тел во внешнем гравитационном поле – это все то же движение по инерции, но в *искривленном пространстве*, и тем самым связал тяготение с геометрическими свойствами пространства, точнее пространства-времени. Таким образом, согласно Эйнштейну, тяготение следует рассматривать как результат влияния кривизны на движение тел и на другие физические процессы. В свою очередь, кривизна пространства есть результат влияния материи на свойства пространства и времени.

Теперь мы уже хорошо понимаем, что гравитационное взаимодействие, хотя и является самым слабым из всех известных типов взаимодействий, играет далеко не последнюю роль, поскольку решаемые теорией тяготения проблемы касаются не просто одного из физических полей, а самуй концепции пространства-времени. Тем самым, теория гравитации лежит в основании всех вообще физических теорий.

В этой статье на достаточно простом примере будет рассмотрен вопрос, каким образом *глобальная* структура пространства, т.е. структура пространства в целом, может отражаться на *локальных* наблюдаемых величинах, т.е. на величинах, которые измеряются в данной точке в данный момент времени.

Может ли заряженная частица ускорять саму себя?

Зададим вопрос: может ли покоящаяся заряженная точечная частица в пустом пространстве без границ действовать сама на себя с не равной нулю силой? Вопрос является простым и сложным одновременно.

С одной стороны, основанные на симметрии соображения позволяют утверждать, что в *евклидовом пространстве без границ* сила самодействия должна быть равна нулю. Действительно, появление силы самодействия на изолированный точечный заряд хотя бы в одной точке пространства означало бы, что точно такая же по величине и направлению сила должна действовать на заряд и в любой другой точке, поскольку все положения в пространстве эквивалентны (*однородность пространства*). Одновременно с этим, наличие силы выделяло бы в пространстве некоторое направление, поскольку сила – величина векторная. Но это, в свою очередь, противоречило бы тому, что все направления в пространстве эквивалентны (*изотропность пространства*). Следовательно, в однородном и изотропном пространстве сила самодействия не может быть ничем иным кроме нуля. Можно и не вычислять – все известно заранее!

Казалось бы, все просто. Но это только на первый взгляд. Одна проблема все же остается. Из электростатики известно, что плотность энергии электростатического поля в пустом пространстве равна

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Мы знаем также, что напряженность поля точечного покоящегося заряда в пустом трехмерном евклидовом пространстве без границ равна

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}.$$

Получается, что плотность энергии зависит от расстояния до точки, где расположен заряд, как r^{-4} и, следовательно, полная электростатическая энергия точечного заряда в нуле бесконечна! Что же делать?

Выход из создавшейся ситуации был найден другим выдающимся физиком XX века – П.Дираком. Он обратил внимание на то, что отдельное рассмотрение энергии кулоновского поля фактически является бессмысленным. Поступая таким образом, мы предполагаем, что энергия системы, состоящей из точечного заряда и создаваемого им поля, может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$W_{\text{полн}} = m_0c^2 + \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}dV = \, = m_0c^2 + \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int\frac{dV}{r^4},$$

где первое слагаемое m_0c^2 следует рассматривать как энергию покоя частицы в отсутствие поля.

Однако невозможно оторвать заряд от создаваемого им кулоновского поля, которое жестко привязано к частице и движется вместе с ней. (Подчеркнем, что мы здесь не рассматриваем электромагнитные волны, которые рождаются при ускоренном движении заряда, но после этого ведут совершенно самостоятельное существование.) Значит, введенная нами так называемая *затравочная*, или *голая*, масса m_0 есть величина *нефизическая* – величина, которую нельзя измерить в эксперименте. Наблюдается только полная энергия и связанная с ней полная масса, именно она отвечает за инертные свойства частицы. Проблема возникла из-за того, что мы формально разбили реально измеримую конечную величину

$$W_{\text{полн}} = mc^2$$

на сумму двух слагаемых, каждое из которых по отдельности не наблюдаемо.

Таким образом, возникает необходимость *перенормировки* собственной энергии: мы должны написать, что затравочная собственная энергия (масса) связана с *физической* энергией (массой) соотношением

$$m_0c^2 = mc^2 - \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int\frac{dV}{r^4},$$

т.е. энергии отличаются друг от друга на бесконечно большую величину. Поначалу процедура перенормировки может показаться весьма странной, однако не будем забывать, что затравочная масса – величина ненаблюдаемая и ей можно приписать любое значение. Можно, в частности, считать ее бесконечной.

Обратим внимание на одну особенность полученного выше выражения: результат перенормировки не зависит ни от момента времени, ни от координат точки, в которой находится заряд. Это является отражением однородности трехмерного евклидова пространства и однородности времени, т.е. тех свойств симметрии пространства и времени, которые были заложены Ньютоном в его модели пространства событий.

Итак, если мы задались вопросом, может ли взаимодействие с собственным кулоновским полем влиять на динамику частицы, то мы должны сказать, что в евклидовом пространстве без границ это невозможно.

А что будет, если пространство искривлено и потеряна однородность? Разумеется, проблема бесконечности собственной энергии останется: это следствие точечности источника, с которой кривизна пространства ничего поделать не может. Но не это главное. Предположим, что мы нашли удовлетворяющую всем разумным требованиям процедуру перенормировки. Естественно ожидать, что в этом случае перенормированная собственная электростатическая энергия будет зависеть от положения заряда. Это было бы вполне естественным следствием отсутствия однородности пространства. Но если энергия зависит от точки, то, как это известно из механики, на частицу действует сила. Мы пришли к заключению, что на уединенный точечный заряд, помещенный в искривленное пространство, может действовать сила, появление которой обязано тому, что пространство имеет структуру, отличающуюся от структуры евклидова пространства.

Чтобы разобраться в этом вопросе несколько подробнее, рассмотрим конкретный пример.

Коническое пространство: кривизна без кривизны

Мы привыкли к тому, что если в пространстве введена декартова система координат, то множество точек, имеющих одну и ту же координату z, образует евклидову плоскость. Это соответствует изображенной на рисунке 1 структуре, когда трехмерное евклидово пространство представляется в виде слоеного пирога из наложенных друг на друга евклидовых плоскостей. При этом каждая

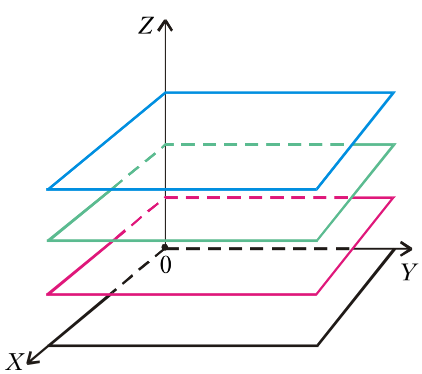

Рис.1

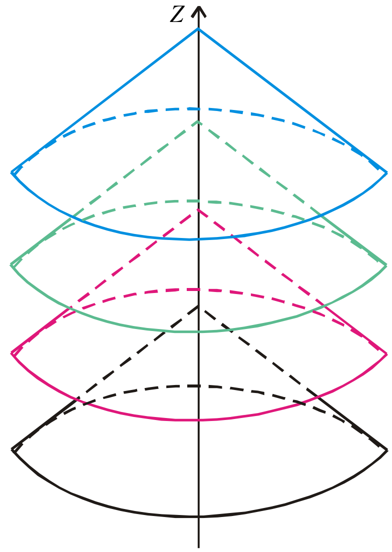

Рис.2

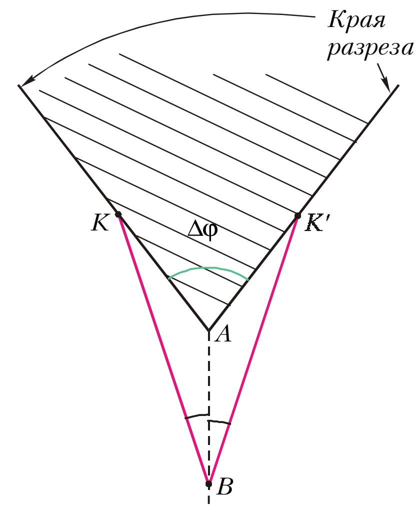

Рис.3

точка пространства принадлежит одной и только одной плоскости.

Заменим теперь каждую из изображенных на рисунке 1 плоскостей конусом так, как это схематически показано на рисунке 2. Иными словами, попробуем представить себе трехмерное пространство, в котором введена *ортогональная* система координат и каждому фиксированному значению координаты z соответствует двумерная поверхность с геометрией конуса. Мы намеренно выделили слово «ортогональная», поскольку трехмерное евклидово пространство также можно заполнить наложенными друг на друга конусами, однако там нельзя ввести ортогональную систему координат таким образом, чтобы все точки конуса имели одну и ту же координату z. Заметим, что в построенном нами *коническом* пространстве плоскому движению, при котором координата z фиксирована, будет соответствовать движение по поверхности конуса.

А действительно ли наше пространство искривлено? Конечно, но достаточно нетривиальным образом.

В самом деле, чтобы сделать конус, следует взять лист бумаги (евклидову плоскость), как это показано на рисунке 3, провести из произвольным образом выбранной точки A под некоторым углом $\Delta\varphi$ два луча, удалить (вырезать) заштрихованную область, а соответствующие точки краев разреза отождествить (склеить по краям разреза). Понятно, что при этом не происходит деформации листа ни в одной точке, за исключением самой точки A, которая теперь становится вершиной конуса. Углы и расстояния остаются неизменными. Остается справедливой теорема Пифагора, если только вершина конуса не попадет внутрь треугольника. Но все же что-то изменяется… Если из некоторой точки B, лежащей вне вершины, мы проведем два луча так, чтобы образуемые ими с линией AB углы были равны, то лучи снова пересекутся. Действительно, длины отрезков AK и AK' одинаковы, а соответствующие точки краев разреза отождествляются: точки K и K' – это на самом деле одна и та же точка. Две прямые, которые вышли из одной точки, снова пересеклись!

Таким образом, мы построили поверхность, которая *локально* неотличима от евклидовой плоскости, но ее *глобальные* свойства совсем другие. Можно сказать, что вся кривизна конуса сосредоточена в его вершине. Это свойство принципиально отличает конус от других искривленных поверхностей (таких, например, как поверхность сферы) и будет крайне существенным в дальнейшем.

Самодействие в картинках

Вернемся к проблеме самодействия и посмотрим, как это выглядит в случае конического пространства. К сожалению, аналитическое рассмотрение задачи предполагает знание разделов математики, которые не знакомы большей части читателей журнала. Поэтому мы вынуждены по-прежнему ограничиться только качественным рассмотрением.

Начнем с выяснения того, чту мы можем сказать о силе самодействия, основываясь только на соображениях, связанных с размерностью. Рассмотрим точечный заряд q, находящийся на расстоянии ρ от вершины конуса. В интересующем нас случае есть две размерные величины: заряд и расстояние, а также одна размерная константа: ε_0; никаких других размерных констант не имеется. Но из q, ρ и ε_0 величина с размерностью силы строится единственным образом:

$$\vec{F} = C(\Delta\varphi)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\rho^3}\vec{\rho}.$$

Здесь $C(\Delta\varphi)$ – некоторая неопределенная безразмерная константа, которая, конечно же, может быть найдена лишь путем непосредственных вычислений. Про нее мы знаем только то, что при $\Delta\varphi = 0$ она должна обращаться в ноль. Это достаточно очевидно, поскольку при $\Delta\varphi = 0$ мы приходим к евклидову пространству, в котором сила самодействия, как мы это уже выяснили, равна нулю. В последнем выражении мы учли также и то обстоятельство, что благодаря имеющейся в задаче симметрии сила может быть направлена только вдоль прямой, соединяющей вершину конуса и точку нахождения заряда.

Заметим, что полученный нами из общих соображений результат говорит о том, что точечная заряженная частица будет взаимодействовать с вершиной конуса точно так же, как она взаимодействовала бы с зарядом Cq на расстоянии ρ в евклидовом пространстве. Осталось неопределенным только направление силы, поскольку знак константы C может быть любым. Разобраться в этом нам поможет то замечательное свойство конуса, которое мы назвали его локальной евклидовостью и которое позволяет, разрезав поверхность по образующей, развернуть конус на евклидовой плоскости, нигде не деформируя его поверхность.

Пусть в точку B, находящуюся на некотором не равном нулю расстоянии от вершины конуса, помещен точечный заряд q. Для простоты будем считать наше пространство двумерным – это позволит нам лучше представить происходящее. Как выглядит картина силовых линий соответствующего электростатического поля? Пусть, для определенности, заряд частицы положителен. Давайте, как это показано на рисунке 4, развернем конус на евклидовой плоскости, разрезав его вдоль линии, являющейся продолжением линии, соединяющей точку B, где расположен заряд, с вершиной конуса A. (Конечно, разрезать можно вдоль любой из образующих, результат от этого зависеть не будет, но лучше поступить так, как мы сказали.) При этом сохранится симметрия между правым и левым – зеркальная симметрия относительно линии AB – и все рассуждения станут более наглядными.

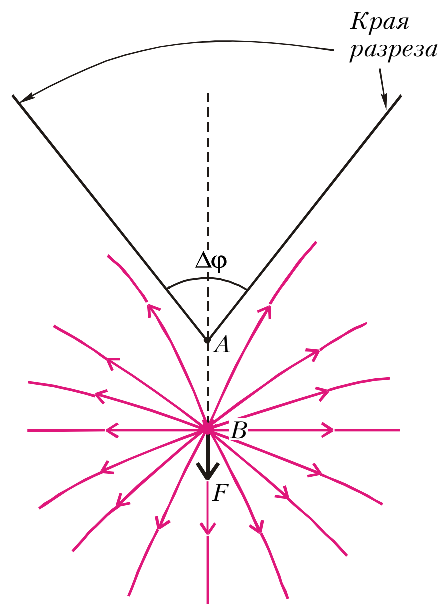

Рис.4

Подчеркнем еще раз, что свойство конуса разворачиваться на плоскости без деформации позволяет нам быть уверенными, что мы увидим силовые линии именно такими, какие они есть. Наибольший интерес представляют силовые линии, составляющие малые углы с отрезком BA. Понятно, что эти линии должны будут изгибаться, приближаясь к «берегу» разреза, *но не пересекая его*. Пересечение силовой линии с «берегом» разреза означало бы пересечение силовых линий, выходящих из точки B под одним и тем же углом к линии BA, но по разные стороны от нее. А это, в свою очередь, означало бы наличие линейного распределения заряда по другую сторону от вершины конуса. Но там нет никаких зарядов!

Заметим, что все сказанное в равной степени относится и к случаю отрицательного заряда q. Изменится только направление стрелок на силовых линиях.

Мы получили замечательный результат. Находящийся в точке B наблюдатель знает, что в окрестности этой точки геометрия евклидова, однако картина силовых линий такова, как если бы в точку, отстоящую от него на длину отрезка BA, был помещен одноименный с q заряд, величина которого зависит от $\Delta\varphi$. Но это означает, что q должен *отталкиваться* от вершины конуса с силой, которая пропорциональна q^2, стремится к нулю при стремлении к нулю $\Delta\varphi$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния до вершины конуса.

Заключение

Теперь несколько слов относительно названия статьи. Почему именно *топологическое* самодействие? В рассматриваемом нами случае все просто. В достаточно малой окрестности точки, где расположен заряд, т.е. *локально*, геометрия в точности та же, что и на евклидовой плоскости, и если бы наша точечная частица не была заряжена, мы, возможно, никогда бы и не узнали о том, что где-то имеется коническая особенность. Но собственное электростатическое поле частицы простирается до бесконечности и «знает», что *глобально* пространство устроено совсем не так, как евклидова плоскость. А через поле «знает» об этом и частица. Физический эффект, который мы обнаружили, обусловлен глобальной, или *топологической,* структурой пространства – отсюда и название.

Имеет ли рассмотренное нами коническое пространство хоть какое-то отношение к реальному миру? Оказывается, имеет. Было показано, например, что именно так устроено пространство объектов, которые должны были возникнуть вскоре после Большого Взрыва и которые получили название *космических струн.* Эти объекты весьма активно и с различных точек зрения обсуждаются в научной литературе в последние годы. Существует мнение, что в значительной степени благодаря космическим струнам крупномасштабная структура Вселенной именно такова, какой мы ее видим.