Пределы зоркости приборов

А.СТАСЕНКО

«Мистер Лунд подошел к телескопу и начал смотреть на луну…

– А не видите ли вы бледных пятен, движущихся возле луны?..

– Черт возьми, сэр! Называйте меня ослом, если я не вижу этих пятен! Что это за пятна?

– Это пятна, которые видны в один только мой телескоп. Довольно! Оставьте телескоп!

…Через полчаса мистер Вильям Болваниус, Джон Лунд и шотландец Том Бекас летели уже к таинственным пятнам на восемнадцати аэростатах.

…Кто из читателей воспылает желанием ближе познакомиться с мистером Вильямом Болваниусом, тот пусть прочтет его замечательное сочинение «Существовала ли луна до потопа? Если существовала, то почему же и она не утонула?»… Между прочим, там описывается, как он прожил два года в австралийских камышах, где питался раками, тиной, яйцами крокодилов и … изобрел микроскоп, совершенно сходный с нашим обыкновенным микроскопом…» (А.Чехов. «Летающие острова»).

Действительно, среди многочисленных приборов, изобретенных физиками, широкую известность получили телескоп и микроскоп. Один из них устремлен в глубины Вселенной, другой позволяет рассматривать всякую мелочь буквально «под носом». Обсудим вкратце, как они работают.

С точки зрения геометрической оптики, *с телескопом* все просто. Есть две соосные линзы с фокусными расстояниями $F_{об}$ у объектива и $F_{ок}$ у окуляра (рис.1). Лучи, идущие от каждой из двух рассматриваемых звезд –

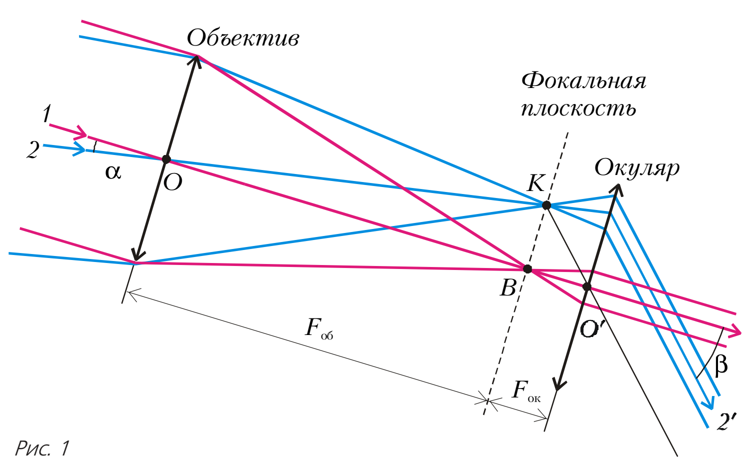

Рис. 1

направления *1* и *2*, – почти параллельны и, по определению фокусного расстояния, после объектива они должны собраться в двух точках B и K, лежащих в фокальной плоскости объектива. Но в телескопической системе это одновременно и фокальная плоскость окуляра, поэтому, пройдя через окуляр, лучи должны выйти тоже двумя параллельными пучками с осями $1'$ и $2'$. Угол между входящими лучами *1* и *2* (направлениями на две звезды) обозначим через α, а угол между выходящими лучами – через β. Легко видеть, в чем «фокус» такой телескопической системы. Из прямоугольных треугольников OBK и $O'BK$ видно, что их общий катет равен

$$BK = F_{\text{об}} \operatorname{tg} \alpha = F_{\text{ок}} \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_{\text{об}}}{F_{\text{ок}}} \approx \frac{\beta}{\alpha} \qquad (1)$$

(последнее приближенное равенство записано для случая малых углов, который обычно и реализуется на практике).

Полученное соотношение открывает, казалось бы, неограниченные возможности для увеличения телескопа: нужно брать как можно более длиннофокусный объектив (вот почему оптические телескопы-рефракторы такие длинные) и как можно более короткофокусный окуляр. Но тут вмешивается еще один характерный размер – длина волны λ. Как же иначе? Ведь свет – это электромагнитные волны в диапазоне 0,4 мкм $\lesssim \lambda \lesssim$ 0,8 мкм. А любая волна, проходя около препятствия, дифрагирует. Более того, любой участок *первичной волны* (например, в плоскости объектива), согласно принципу Гюйгенса—Френеля, можно считать источником *вторичных* волн, которые затем интерферируют друг с другом всюду, где встретятся, например – в фокальной плоскости объектива.

Проведем при помощи этого принципа приближенное рассмотрение дифракции света (от одной звезды) на объективе телескопа. Разобьем объектив условно на две половины (рис.2,*а*) и будем считать, что обе они являются источниками вторичных волн. Если принять расстояние между точками C и C' равным половине диаметра D объектива, то разность хода волн, пришедших от них в точку M, будет приблизительно равна (см. выделенный треугольничек на рисунке 2,*б*)

$$\Delta = \frac{D}{2} \sin \theta .$$

И результат их интерференции будет определяться значением этой разности. Например, в точке B (да и на всей оптической оси OB) имеем $\theta = 0$ и $\Delta = 0$; значит, эти две волны будут усиливать друг друга, так что в фокусе объектива (если туда поставить пластинку, перпендикулярную оптической оси) будет светлое пятно.

Можно уточнить этот результат, считая, что точки C и C' соответствуют центрам тяжести каждой из половин объектива. Нетрудно показать (например, сделав полукруг из картона и уравновесив его на лезвии ножа) или посмотреть в справочнике, что центр масс полукруга находится на высоте $y_C = \frac{4}{3\pi}\frac{D}{2}$ над его диаметром. Значит, разность хода Δ двух сферических волн, исходящих из точек C и C' под углом θ к оптической оси, будет равна

$$\Delta = 2y_C \sin \theta = \frac{8}{3\pi}\frac{D}{2} \sin \theta . \qquad (2)$$

Будем теперь перемещать вверх (или вниз) точку наблюдения в фокальной плоскости. Тогда угол θ будет расти, а вместе с ним будет расти разность хода Δ. Очень важно найти, при каком значении угла $\theta_{1\,\min}$ эта разность хода станет равной $\Delta_{1\,\min} = \frac{\lambda}{2}$, так что волны погасят друг друга. Из выражения (2) имеем

$$\sin \theta_{1\,\min} = \frac{3\pi}{8}\frac{\lambda}{D} = 1{,}18\frac{\lambda}{D} \approx \theta_{1\,\min} .$$

Конечно, принцип Гюйгенса—Френеля предписывает складывать элементарные возмущения от малых площадок первичной волны (т.е. интегрировать). При этом нам пришлось бы иметь дело с так называемыми функциями Бесселя, которые в случае осевой симметрии являются аналогами «обычных» синусов и косинусов, характерных для одномерных задач (например, струны гитары). И тогда получился бы более точный результат:

$$\sin \theta_{1\,\min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D} . \qquad (3)$$

Видно, что наше грубое рассмотрение всего лишь на четыре процента отличается от более точного – не так уж и плохо. Но почему для нас так важен этот угол? Потому что он дает радиус первого темного кольца $BM = F_{\text{об}} \cdot \theta_{1\,\min}$, окружающего светлое пятнышко – изображение звезды в фокальной плоскости объектива. Получается, что это вовсе не точка, как утверждает геометрическая оптика. Значит, вторая звезда с угловым расстоянием α от оптической оси тоже даст светлое пятнышко в фокальной плоскости, и теперь все дело в том, насколько далеко оно окажется от изображения первой звезды. Великий Рэлей предложил простой критерий: должно быть

$$\alpha \gtrsim \theta_{1\,\min} , \qquad (4)$$

иначе изображения двух звезд наложатся друг на друга уже в фокальной плоскости объектива и далее никакими ухищрениями их не разделить.

Но оторвемся от звезд и заглянем *в микроскоп*. Обычное построение изображений предмета в объективе и окуляре (в приближении тонких линз) дано на рисунке 3. Тут существенно,

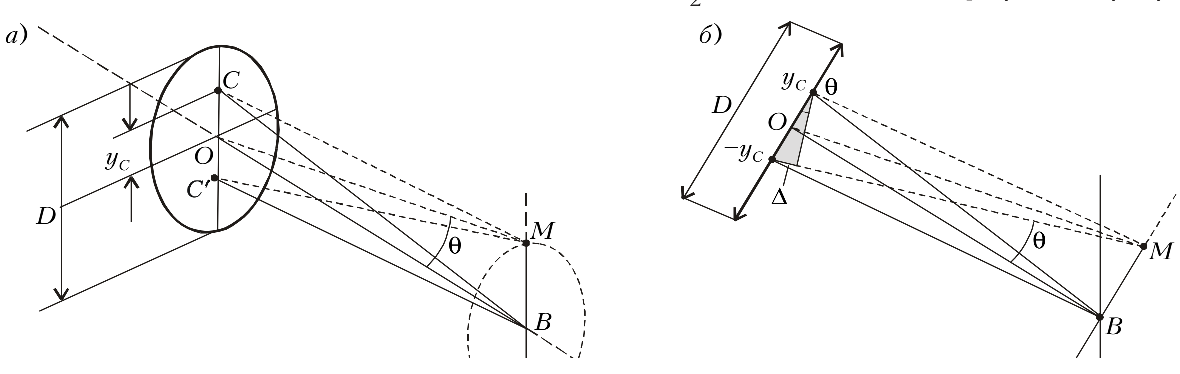

Рис. 2

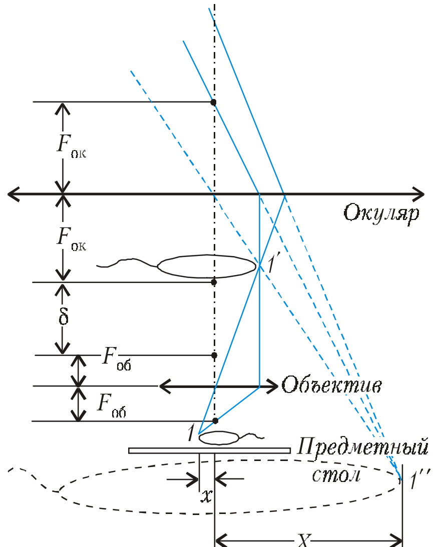

Рис. 3

чтобы предмет находился за фокусом объектива – тогда изображение $1'$ будет действительным, а это изображение чтобы находилось между окуляром и его фокусом – тогда окончательное изображение $1''$ будет мнимым.

Геометрическая оптика дает для увеличения микроскопа следующее выражение (см. рис.3):

$$\frac{X}{x} = \frac{D_0 \delta}{F_{ок} F_{об}},$$

где δ – расстояние между фокусами объектива и окуляра, D_0 – так называемое расстояние наилучшего зрения. Увеличение микроскопа может быть значительным. Например, для характерных значений $F_{об} = 2$ мм, $F_{ок} = 15$ мм, $\delta = 160$ мм и $D_0 = 250$ мм получим $X/x = 1335$.

Казалось бы, это не предел – надо лишь делать линзы все более совершенными геометрически (шлифовать), устранять их недостатки (апланатизм, астигматизм, хроматическую и сферическую аберрации, дисторсию…) и все будет в порядке. Но и тут вмешалась все та же λ!

Теорию разрешающей способности микроскопа разработал Аббе (о нем совсем недавно рассказывалось в «Кванте» – см. №1 за 2000 г.). Он предложил рассмотреть в микроскоп дифракционную решетку (рис.4). Какую минимальную информацию можно получить об этой решетке? Конечно, прежде всего можно узнать ее период d.

Как известно, при прохождении через решетку света с длиной волны λ должен получиться набор дифракционных максимумов. Если свет падает на решетку под углом θ_0, то направление на эти максимумы определяется условием

$$\Delta_m - \Delta_0 = d \sin\theta_{m\,\max} - d\sin\theta_0 = m\lambda. \qquad (5)$$

Чтобы микроскоп дал информацию о периоде d, в его объектив должны прийти по крайней мере два луча, соответствующих двум соседним максимумам дифракционной картины, например $m = 0$ и $m = -1$. Именно такой предельный случай $\alpha = \theta_0$ и $-\alpha = \theta_{-1\max}$ изображен на рисунке 4. Заметим, что период решетки d, который мы стремимся рассмотреть, конечно, очень мал – порядка микрометров. В этом масштабе объектив микроскопа и его фокусное расстояние (порядка миллиметров) таковы, что сам объектив нужно было бы изобразить далеко за пределами рисунка (порядка метров); поэтому он показан штриховой линией лишь условно (а идущие к нему от узлов решетки лучи почти параллельны).

Итак, из условия (5) получим $2d\sin\alpha = \lambda$ (α называется апертурным углом). Значит, при заданной длине волны подсветки наименьший период решетки, который можно «рассмотреть» в микроскоп, равен $d_{\min} = \frac{\lambda}{2\sin\alpha}$. Можно еще облегчить дело: если между решеткой и объективом поместить среду с коэффициентом преломления n (например, капнуть какую-либо жидкость), то увеличится *оптическая разность хода* (ведь в этой среде скорость света и длина волны станут в n раз меньше). В результате получим

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n\sin\alpha}. \qquad (6)$$

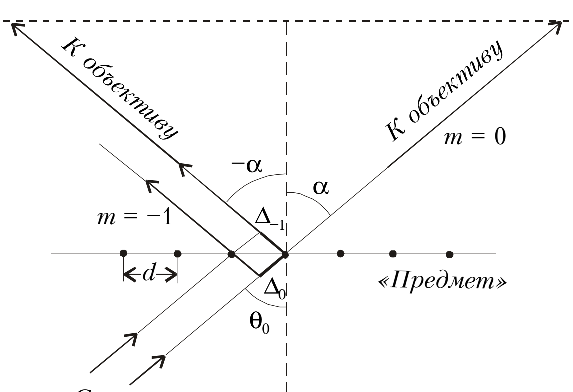

Рис. 4

Теперь сравним разрешающие способности телескопа и микроскопа. Получается, что мы выдвигаем прямо противоположные требования:

для телескопа $\frac{\lambda}{D} \approx \alpha_{\min}$ желательно делать как можно меньше;

для микроскопа $\frac{\lambda}{d} \approx 2n\sin\alpha$ желательно делать как можно больше.

Отсюда понятно стремление строить телескопы с возможно большим диаметром входного «зрачка», а микроскопы – с возможно меньшим фокусным расстоянием объектива (чтобы $\sin\alpha$ был как можно ближе к единице) и при этом пространство между объективом и предметом наблюдения следует заполнить жидкостью с возможно бо́льшим показателем преломления n (так называемая *иммерсионная техника*).

Что же достигнуто человечеством?

Самый большой диаметр объектива оптического телескопа $D \sim 6$ м. Для «средней» длины волны света $\lambda \sim 0{,}6$ мкм из выражений (3) и (4) будем иметь $\alpha_{\min} \sim 10^{-7}$. Принимая радиус Вселенной $R \sim 10^{26}$ м, для двух разрешимых точек на ее «границе» получим

$$l_{\min} \sim R\alpha_{\min} \sim 10^{19} \text{ м}.$$

В случае микроскопа положим $\sin\alpha \lesssim 1$, $n \approx 1{,}6$ (коэффициент преломления анилина). Тогда из равенства (6) найдем

$$d_{\min} \gtrsim \frac{\lambda}{4} \sim 0{,}1 \text{ мкм} = 10^{-7} \text{ м}.$$

Таковы характерные пределы возможностей этих замечательных оптических приборов.