Решения задач М1706—М1710, Ф1718–Ф1727

М1706. *Пусть AL и BM – биссектрисы треугольника ABC. Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ACL и BCM лежит на отрезке AB. Докажите, что $\angle ACB = 60°$.*

Пусть K – точка пересечения окружностей на стороне AB, $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$, $\angle ABM = \angle MBC = \beta$. Тогда $\angle MCK = \angle MBK = \beta$, $\angle LCK = \angle LAK = \alpha$, как опирающиеся на равные дуги. Как видим, $\angle ACB = \alpha + \beta$, а сумма углов треугольника ABC равна $3(\alpha+\beta)$. Значит, $\angle ACB = 60°$.

Е.Сопкина

М1707*. *Квадрат клетчатой бумаги, состоящий из $n \times n$ клеток, разрезан на 2n прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже, либо выше ступенчатой ломаной, разделяющей квадрат (рис.1). Докажите, что найдется клетка клетчатой бумаги, являющаяся одним из названных прямоугольников.*

Ступенчатая ломанная разрезает квадрат на два ступенчатых треугольника T_1 и T_2, при этом основание T_1 состоит из n клеток, а основание T_2 – из $n - 1$ клетки. В силу условия задачи, один из них разрезан на m, а другой – на k прямоугольников, причем $m + k = 2n$.

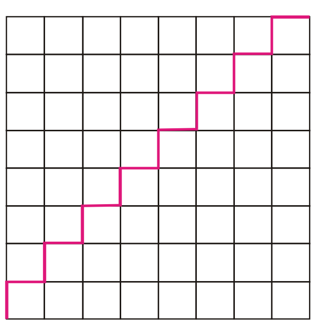


Рис.1

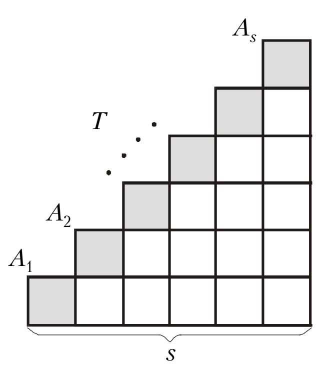


Рис.2

Пока что фиксируем внимание на отдельно взятом ступенчатом треугольнике T, в основании которого s клеток (рис.2). Так как при разрезании T на прямоугольники любые две точки из набора A_1, A_2, …, A_s должны принадлежать разным прямоугольникам, можно заключить, что T нельзя разрезать на менее чем s прямоугольников.

Разберем далее тот случай, когда T разрезан в точности на s прямоугольников; тогда каждая из точек A_1, A_2, …, A_s принадлежит только одному из них и, более того, каждая из s закрашенных клеток принадлежит целиком только одному из s прямоугольников. Незакрашенных клеток, примыкающих по сторонам к закрашенным, на единицу меньше, чем закрашенных, поэтому хотя бы один из s прямоугольников не выйдет за пределы своей заштрихованной клетки, т.е. будет с ней совпадать.

Возвращаясь к ступенчатым треугольникам T_1 и T_2, можно сказать, что $m \ge n$, а $k \ge n-1$. Но так как $m + k = 2n$, то либо $m = n$, либо $k = n - 1$. Значит, либо в T_1, либо в T_2 найдется прямоугольник, совпадающий с клеткой клетчатой бумаги.

В.Произволов

М1708. *Играют двое. Они по очереди пишут на доске делители числа 100!, отличные от 1 (без повторений). Проигрывает тот игрок, после хода которого числа на доске окажутся в совокупности взаимно просты.*
Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник?

Ответ: выигрывает второй игрок.

Предположим, что кто-то не может сделать ход. Поскольку перед последним ходом все числа на доске имели общий делитель, больший единицы, то они имели общий простой делитель p. Так как следующий ход сделать невозможно, на доску должны быть уже выписаны все делители 100!, делящиеся на p. Очевидно, количество таких делителей равно количеству делителей числа $100!/p$. Как известно, количество делителей натурального числа нечетно тогда и только тогда, когда это число является точным квадратом. Следовательно, если число не представляется в виде pm^2, где p – простое число, то количество его делителей, делящихся на любой простой делитель p, четно, т.е. выигрывает второй.

Осталось заметить, что число 100! делится на простые числа 97 и 89, но не делится на их квадраты, поэтому число 100! не представляется в виде pm^2, где p – простое число.

Д.Карпов

М1709. *Окружность пересекает стороны прямоугольника в восьми точках, которые последовательно занумерованы. Докажите, что площадь четырехугольника с вершинами в точках с нечетными номерами равна площади четырехугольника с вершинами в точках с четными номерами (рис.1).*

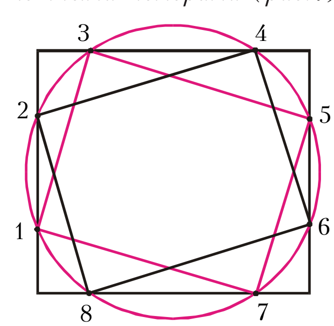


Рис.1

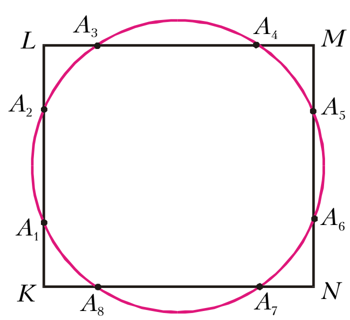


Рис.2

Сначала запишем вспомогательное равенство для отрезков горизонтальных сторон прямоугольника $KLMN$, выступающих за пределы окружности (рис.2):

$$LA_3 + NA_7 = MA_4 + KA_8.$$

Это равенство следует хотя бы из того, что трапеция $A_8A_3A_4A_7$ – равнобочная. Аналогично получаем другое вспомогательное равенство для отрезков вертикальных сторон: $KA_1 + MA_5 = LA_2 + NA_6$. Третье вспомогательное равенство получим, если приравняем произведения левых и произведения правых частей первых двух. Обозначив через a длину горизонтальной стороны прямоугольника $KLMN$, а через b – длину его вертикальной стороны, запишем основное равенство:

$$LA_3(b-KA_1)+NA_7(b-MA_5)+$$
$$+KA_1(a-NA_7)+MA_5(a-LA_3)=$$
$$=MA_4(b-NA_6)+KA_8(b-MA_5)+$$
$$+LA_2(a-MA_4)+NA_6(a-KA_8).$$

Это равенство непосредственно следует из трех вспомогательных равенств. Оно означает, что сумма площадей четырех прямоугольных треугольников LA_1A_3, NA_5A_7, KA_7A_1 и MA_3A_5 равна сумме площадей треугольников MA_6A_4, KA_2A_8, LA_4A_2 и NA_8A_6. Но в таком случае площади четырехугольников $A_1A_3A_5A_7$ и $A_2A_4A_6A_8$ равны.

В.Произволов

М1710*. *Пусть x, y, z, p, q, r – положительные числа такие, что $p+q+r=1$, $x^py^qz^r=1$. Докажите неравенство*

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\ge\frac{1}{2}.$$

Докажем вначале некоторые вспомогательные неравенства.

Лемма 1.

$$x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha, \qquad (1)$$

где $x>0$, $0<\alpha<1$.

Доказательство. При $x>0$ рассмотрим функцию

$$f(x)=x^\alpha-\alpha x,$$

где $0<\alpha<1$. Имеем

$$f'(x)=\alpha\left(x^{\alpha-1}-1\right)\begin{cases}>0 \text{ при } 0<x<1,\\ <0 \text{ при } x>1.\end{cases}$$

Следовательно, функция возрастает, пока x изменяется в промежутке $(0;\ 1]$, и убывает в промежутке $[1;\ +\infty)$. Отсюда ясно, что $f(1)=1-\alpha$ будет наибольшим значением функции в промежутке $(0;\ +\infty)$.

Лемма 2.

$$a^\alpha b^\beta\le\alpha a+\beta b, \qquad (2)$$

где a, b, α, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$.

Для доказательства достаточно положить в (1) $x=\dfrac{a}{b}$ и обозначить $1-\alpha$ через β.

Лемма 3.

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\le\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

где $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Для доказательства достаточно применить дважды неравенство (2):

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma=a^\alpha\left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}\le\alpha a+(\beta+\gamma)b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\le$$
$$\le\alpha a+(\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c\right)=\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно было бы совершить и переход от n к $n+1$ и доказать – по методу математической индукции – общее неравенство, которое (в измененных обозначениях) имеет вид

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\ldots a_n^{q_n}\le q_1a_1+q_2a_2+\ldots+q_na_n \qquad (3)$$

(где $a_1,\ldots,a_n,\ q_1,\ldots,q_n>0,\ q_1+\ldots+q_n=1$).
Равенство достигается лишь тогда, когда $a_1=\ldots=a_n$.
Перейдем теперь к доказательству неравенства задачи. Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$\left(u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2\right)^2\le\left(u_1^2+v_1^2+w_1^2\right)\left(u_2^2+v_2^2+w_2^2\right),$$

где u_i, v_i, w_i $(i=1,\,2)$ – действительные числа. Полагая

$$u_1=\frac{px}{\sqrt{qy+rz}},\ v_1=\frac{qy}{\sqrt{px+rz}},\ w_1=\frac{rz}{\sqrt{px+qy}},$$

$$u_2=\sqrt{qy+rz},\ v_2=\sqrt{px+rz},\ w_2=\sqrt{px+qy},$$

будем иметь неравенство

$$(px+qy+rz)^2\le\left(\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\right)\times$$
$$\times 2(px+qy+rz),$$

из которого следует, что

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\ge\frac{1}{2}(px+qy+rz).$$

Так как $p+q+r=1$, то для оценки суммы $px+qy+rz$ снизу можно применить неравенство леммы 3:

$$px+qy+rz\ge x^py^qz^r=1.$$

Неравенство задачи доказано.
Замечание 1. Полагая в неравенстве (3) $q_1=\ldots=q_n=\dfrac{1}{n}$, получим

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Из неравенства (3) нетрудно вывести также и некоторые другие классические утверждения. Например, легко получить так называемое неравенство Коши–Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\left\{\sum_{i=1}^n a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}\cdot\left\{\sum_{i=1}^n b_i^{k'}\right\}^{\frac{1}{k'}}$$

(где $a_i,b_i>0;\ k,k'>1,\ \dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k'}=1$),
а также неравенство, носящее имя Минковского:

$$\left\{\sum_{i=1}^n\left(a_i+b_i\right)^k\right\}^{\frac{1}{k}}\le\left\{\sum_{i=1}^n a_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}+\left\{\sum_{i=1}^n b_i^k\right\}^{\frac{1}{k}}$$

(где $a_i,b_i>0,\ k>1$).
Замечание 2. Положим в неравенстве задачи $p=q=r=$ $=\dfrac{1}{3}$:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}.$$

Теперь положим $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$. Получим

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $abc = 1$.

Эта задача предлагалась в 1995 году на Международной математической олимпиаде (см. задачу М1526).

С.Калинин, В.Сендеров

Ф1718. *Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью 5 м/с. В некоторый момент его замечает лиса и начинает погоню. Скорость лисы постоянна по величине и равна 4 м/с, а движется она тоже не самым лучшим образом – скорость ее в каждый момент направлена точно в ту точку, где находится заяц. Вначале расстояние между ними уменьшается, затем начинает возрастать. Минимальное расстояние составляет 30 м. Какое ускорение было у лисы в тот момент, когда расстояние стало минимальным?*

В неподвижной системе отсчета скорость лисы по модулю постоянна; значит, ускорение лисы связано с поворотом вектора ее скорости. Пусть в некоторый момент скорость лисы составляет угол α с направлением скорости зайца, тогда скорость сближения лисы и зайца равна

$$v_{\text{отн}} = v_{\text{л}} - v_{\text{з}} \cos\alpha .$$

Минимальное расстояние между участниками забега получается в тот момент, когда относительная скорость становится нулевой; значение угла при этом определяется соотношением

$$\cos\alpha_0 = \frac{v_{\text{л}}}{v_{\text{з}}} = 0{,}8 .$$

Теперь мы можем задать очень малый интервал времени τ, найти малый угол поворота вектора скорости лисы:

$$\varphi = \frac{\tau v_{\text{з}} \sin\alpha}{L}$$

и ускорение лисы:

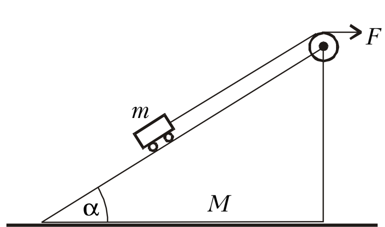
$$a = \frac{v_{\text{л}}\varphi}{\tau} = \frac{v_{\text{л}} v_{\text{з}} \sin\alpha}{L} = 0{,}4 \ \text{м/с}^2 .$$

Можно решать задачу и в системе отсчета, которая связана с зайцем, – но при этом придется учитывать и изменение модуля скорости лисы!

М.Учителев

Ф1719. *В системе, показанной на рисунке, силы трения отсутствуют. При каком значении силы F клин и тележка могут двигаться вместе, без проскальзывания? Угол при основании клина α.*

Клин и тележка могут двигаться вместе (без проскальзывания) только в том случае, когда их ускорения одинаковы, т.е. направлены горизонтально и равны



$$a = \frac{F}{M+m}.$$

Теперь можно записать уравнения движения тележки по горизонтали и вертикали:

$$F\cos\alpha - N\sin\alpha = ma = \frac{mF}{M+m},$$

$$F\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0 .$$

Отсюда легко найти выражение для необходимой силы:

$$F = \frac{mg\sin\alpha}{1 - \dfrac{m\cos\alpha}{M+m}}.$$

А.Клинов

Ф1720. *Кусок мела лежит на горизонтальной доске с коэффициентом трения μ. Доску резко начинают двигать в горизонтальном направлении со скоростью v_0, а через время τ резко останавливают. Найдите длину меловой черты на доске.*

Если за время τ кусок мела успеет набрать скорость, которую придают доске, то он переместится по доске на

$$L_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Если теперь доску резко остановить, кусок мела проедет столько же в обратную сторону, остановится в начальной точке, и длина меловой черты будет равна L_1.

Если же отрезок времени τ мал и мел не успеет остановиться относительно доски, то решение выглядит по-другому. Длина меловой черты до момента остановки доски равна

$$L_2 = v_0\tau - \frac{\mu g\tau^2}{2}.$$

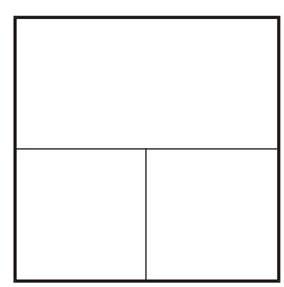
К моменту остановки доски мел приобретет скорость (относительно неподвижной системы отсчета) $v = \mu g\tau$. После остановки доски скорость куска мела начнет убывать – до полной остановки, а длина пройденного при этом пути составит

$$L_3 = 0{,}5v \cdot \frac{v}{\mu g} = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Легко видеть, что эта величина меньше L_2, следовательно, длина меловой черты в этом случае равна L_2.

К.Чертов

Ф1721. *В высокий вертикальный сосуд квадратного сечения, разделенный вертикальными перегородками на три части (см. рисунок), налили до одной и той же высоты горячий суп с температурой +65 °С – в большое отделение, теплый компот при +35 °С и холодный квас при +20 °С. Наружные стенки сосуда очень хорошо теплоизолированы, внутренние перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, не очень хорошо проводящего тепло. Через некоторое время суп остыл на 1 градус. Считая, что все эти жидкости – практически одна вода, определите, на сколько изменились за это время температуры остальных двух жидкостей. Кваса в сосуде столько же, сколько компота, супа – вдвое больше.*



При расчетах мы будем пренебрегать теплоемкостью самого сосуда – это разумно, если стенки его тонкие и масса невелика по сравнению с массой жидкости, да и удельные теплоемкости у металлов существенно меньше, чем у воды (и вообще, эта теплоемкость в условии не задана и вычислить ее мы не можем...). Количество теплоты, передаваемое через перегородку за единицу времени, как известно, пропорционально площади контакта и разности температур с двух сторон перегородки. Площади контакта каждой пары жидкостей в нашем случае одинаковы, поэтому можно записать, что от супа к компоту передается количество теплоты

$$Q_1 = k(65° - 35°),$$

от супа к квасу –

$$Q_2 = k(65° - 20°),$$

от компота к квасу –

$$Q_3 = k(35° - 20°)$$

(здесь k – постоянный коэффициент пропорциональности). Тогда суп потерял

$$Q_1 + Q_2 = k \cdot 75°,$$

компот приобрел

$$Q_1 - Q_3 = k \cdot 15°,$$

квас приобрел

$$Q_2 + Q_3 = k \cdot 60°.$$

Учитывая двойную массу супа и сравнивая полученные энергии с отданной, найдем приращение температуры компота:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta t_1 \cdot 15 \cdot 2}{75} = 0{,}4\ °\mathrm{C}$$

и приращение температуры кваса:

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta t_1 \cdot 60 \cdot 2}{75} = 1{,}6\ °\mathrm{C},$$

где $\Delta t_1 = 1\ °\mathrm{C}$ – уменьшение температуры супа.
Можно провести расчет и поточнее – все же в процессе передачи тепла менялись температуры и, главное, разности температур жидкостей, но поправки получатся не очень существенными – во всяком случае, их неучет меньше влияет на результат, чем сделанные нами упрощения модели теплопередачи.

А.Компотов

Ф1722. *В закрытом сосуде кроме воздуха содержится некоторое количество воды. Температура внутри сосуда поддерживается равной +100 °С. Начальный объем сосуда 10 л, жидкость при этом занимает очень небольшую часть объема сосуда, а давление составляет ровно 2 атм. При увеличении объема сосуда до 20 л давление в нем упало до 1,4 атм. Считая эти значения точными, найдите массу воздуха в сосуде. А сколько молекул воды содержится в сосуде?*

Давление насыщенных паров воды при указанной температуре составляет 1 атм, тогда парциальное давление воздуха также получается равным 1 атм. Это дает возможность найти массу воздуха в сосуде (молярную массу воздуха примем, как обычно, равной $\mathrm{M_в} = 29$ г/моль):

$$m_{\text{в}} = \frac{\mathrm{M}_{\text{в}} p_{\text{в}} V}{RT} = 9{,}4\ \text{г}.$$

После увеличения объема сосуда в два раза парциальное давление воздуха снизится в два раза и составит 0,5 атм; следовательно, давление водяных паров окажется равным

$$p_{\text{п}} = 1{,}4\ \text{атм} - 0{,}5\ \text{атм} = 0{,}9\ \text{атм}.$$

Это меньше давления насыщенных паров при +100 °С; значит, испарилась вся вода. Тогда количество молекул воды (водяного пара) в сосуде равно

$$N = \frac{N_{\text{А}} p_{\text{п}} \cdot 2V}{RT} = 3{,}5 \cdot 10^{23},$$

где $N_{\text{А}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$.

З.Рафаилов

Ф1723. *Высокий вертикальный сосуд содержит небольшое количество гелия под поршнем массой М, на который поставлена гиря массой 49М. В состоянии равновесия поршень «висит» над дном сосуда на высоте h. Гирю снимают с поршня, и он начинает движение вверх. Оцените максимальную высоту подъема поршня. На какой высоте над дном сосуда поршень в конце концов остановится? Считайте при расчете, что трения в системе нет, стенки и поршень совершенно не проводят тепло, а теплоемкость стенок и поршня сосуда очень мала.*

Газ совершает работу по подъему поршня за счет своей внутренней энергии – температура газа падает. Если объем газа увеличивается во много раз (а в нашем случае, похоже, так и есть), то он отдает практически всю свою энергию. Воспользуемся этим для оценки максимальной высоты подъема поршня. Запишем уравнение равновесия поршня в начальном состоянии и «энергетическое» уравнение:

$$\frac{50Mg}{S} Sh = \nu RT_0,$$

$$Mg(H - h) = 1{,}5\nu RT_0,$$

откуда получаем максимальную высоту подъема поршня:

$$H = 76h.$$

Найдем теперь высоту H_1, на которой поршень окончательно остановится. Для этого запишем уравнения равновесия в начальном и в конечном состояниях и уравнение энергетического баланса (пусть T_1 – конечная температура):

$$\frac{50Mg}{S} Sh = \nu RT_0, \qquad \frac{Mg}{S} SH_1 = \nu RT_1,$$

$$Mg(H_1 - h) = 1{,}5\nu R(T_0 - T_1).$$

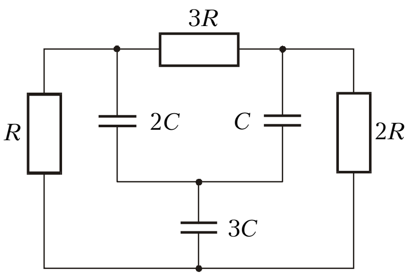
Отсюда находим

$$H_1 = 30{,}4h.$$

А.Повторов

Ф1724. *Конденсаторы, емкости которых С, 2С и 3С, соединены друг с другом, как показано на рисунке. Конденсатор емкостью 2С заряжен до напряжения U_0, остальные два не заряжены. К свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резисторы сопротивлениями R, 2R и 3R. Какое количество теплоты выделится за большое время на каждом из этих резисторов?*

В начальный момент разность потенциалов между выводами резистора $2R$ (для краткости в решении будем



опускать слова «сопротивлением» и «емкостью») равна нулю (конденсаторы C и $3C$ не заряжены). Легко сообразить, что эта разность потенциалов так и останется нулевой. Действительно, отключим резистор $2R$ и посмотрим на разность потенциалов между точками его бывшего подключения: отношение токов, заряжающих конденсаторы C и $3C$, вначале равно $I_C : I_{3C} = 1 : 3$, значит, конденсаторы C и $3C$ заряжаются токами, пропорциональными их емкостям, а напряжения на резисторах R и $3R$ остаются одинаковыми. Если мы поставим на место выброшенный резистор, то ничего не изменится – ток через него течь не будет.

Понятно, что не вся начальная энергия перейдет в тепло – конденсатор $2C$ разряжается (кстати, суммарным током $I_C + I_{3C}$), а конденсаторы C и $3C$ заряжаются, причем процесс этот никогда формально не закончится, хотя все идет к выравниванию всех трех напряжений. В результате конденсаторы оказываются соединенными параллельно – заряд получившегося конденсатора $6C$ равен исходному заряду $2CU_0$.

Итак, емкость возросла в 3 раза, при фиксированном заряде энергия уменьшилась в 3 раза – две трети ее перешли в тепло, что составило $2CU_0^2/3$. Ток через резистор R все время втрое больше, чем через $3R$, мощность на нем получается в $9/3 = 3$ раза больше, т.е. на меньшем резисторе рассеивается $3/4$ общего тепла, а на большем $1/4$. Тогда в резисторе R выделится $W_R = CU_0^2/2$ тепла, а в резисторе $3R$ – $W_{3R} = CU_0^2/6$.

А.Зильберман

Ф1725. *Катушка индуктивности содержит много витков и намотана из проволоки с высоким удельным сопротивлением. Выводы катушки замкнуты между собой, около катушки расположен сильный постоянный магнит. Магнит очень быстро убирают, при этом в цепи появляется ток. За первые 100 мс выделяется 0,01 Дж тепла, за следующие 100 мс – еще 0,006 Дж. Какое общее количество теплоты выделится в цепи за большое время?*

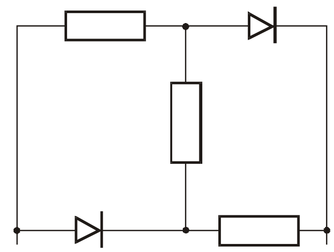
По мере уменьшения тока в цепи уменьшается и скорость спадания этого тока – ЭДС индукции оказывается равной произведению тока в цепи на сопротивление проволоки, из которой сделана катушка. Запишем соответствующее уравнение и преобразуем его:

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} = RI, \text{ или } -L\frac{\Delta I}{I} = R\Delta t.$$

Видно, что за равные интервалы времени ток уменьшается в одно и то же число раз – ясно, что это же относится и к рассеиваемой мощности. Следовательно, за следующие 100 мс выделится $0{,}01 \cdot 0{,}6^2$ Дж тепла, и полное количество теплоты можно найти в виде суммы:

$$W_{\text{полн}} = 0{,}01\left(1 + 0{,}6 + 0{,}6^2 + 0{,}6^3 + \ldots\right) \text{ Дж} = \frac{0{,}01}{1 - 0{,}6} \text{ Дж} = 0{,}025 \text{ Дж}.$$

Ф1726. *Цепочку из трех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 (см. рисунок). Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся на каждом из резисторов.*



Если диоды считать идеальными, то при одной полярности приложенного напряжения такой диод можно заменить куском провода, а при другой он представляет собой разрыв цепи. В нашем случае это означает, что в течение одной половины периода переменного напряжения, когда слева «плюс» и диоды открыты, резисторы соединены параллельно, а следующие полпериода, когда диоды закрыты (разрыв цепи диода), резисторы соединены последовательно, причем на каждом из них напряжение составляет треть приложенного к цепи напряжения. Теперь можно найти мощность, одинаковую на каждом резисторе:

$$P = 0{,}5 \cdot \frac{U_0^2}{2R} + 0{,}5 \cdot \frac{\left(U_0/3\right)^2}{2R} = \frac{5U_0^2}{18R}$$

(не забудьте – в условии задана амплитуда напряжения).

Р.Старов

Ф1727. *В большом спортивном зале стены, пол и потолок оклеены звукопоглощающими (полностью поглощающими звук) покрытиями. На высоте h = 5 см от пола находится мощный точечный источник звука частоты f = 2000 Гц, излучающий звуковые волны равномерно во все стороны. Микрофон малых размеров находится на высоте H = 3 м от пола на расстоянии L = 4 м по горизонтали от источника. Подключенный к микрофону чувствительный вольтметр показывает амплитуду переменного напряжения U = 0,01 В. Как изменятся показания этого вольтметра, если удалить звукопоглощающее покрытие на полу под микрофоном? Считайте, что от пола звуковые волны отражаются без потерь энергии. Какими будут показания вольтметра в том случае, когда покрытие на полу будет восстановлено, но оно окажется очень тонким, качеством похуже и будет поглощать только половину падающей энергии волны, а ослабленная волна будет отражаться от пола зеркально?*

В точке, где мы поместили микрофон, могут складываться несколько волн. Когда звукопоглощающее покрытие выполняло свою задачу, к микрофону приходила только прямая волна, она раскачивала мембрану микрофона и амплитуда переменного напряжения была пропорциональна амплитуде звуковых колебаний. Когда мы испортили покрытие, к микрофону дополнительно стала приходить отраженная от пола волна, когерентная с прямой волной (рис.1). Найдем разность хода прямой и отраженной волн:

$$\sqrt{(H+h)^2 + L^2} - \sqrt{(H-h)^2 + L^2} = \frac{2Hh}{\sqrt{H^2 + L^2}} = 6 \text{ см}$$

(Окончание см. на с. 34)

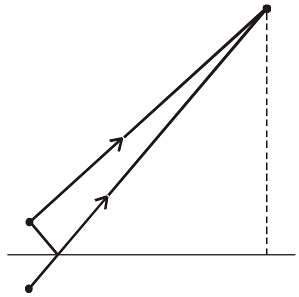


Рис.1

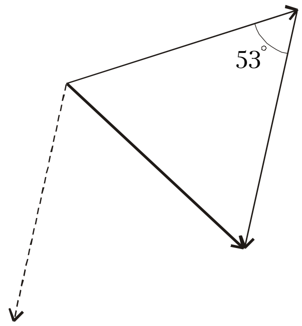


Рис.2

(мы воспользовались при расчете тем, что высота источника звука относительно пола комнаты h во много раз меньше высоты микрофона относительно пола H). Для частоты звука $f = 2000$ Гц и скорости звука в воздухе $v = 340$ м/с длина волны составляет $\lambda = v/f = 0{,}17$ м. При этом отраженная волна отстает на $6/17$ периода и сдвиг фаз составляет 127°. Проще всего найти сумму векторов, нарисовав вектор, изображающий запаздывающую волну, из конца основного вектора – в получившемся треугольнике угол между соответствующими сторонами равен 53° (рис.2). Если считать векторы, изображающие прямую и отраженную волны единичными, то результирующий вектор будет иметь длину 0,89 – вольтметр при этом покажет амплитуду переменного напряжения $0{,}01\ \text{В} \cdot 0{,}89 \approx 0{,}09$ В.

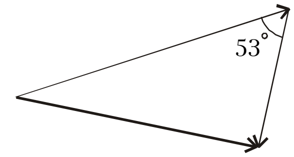


Рис.3

Во втором случае амплитуда отраженной волны в $\sqrt{2}$ раз меньше (энергия меньше вдвое), и на картинке второй вектор покороче (рис.3). При этом амплитуда суммарной волны составит приблизительно 0,81, а показания вольтметра уменьшатся до 0,08 В.

Р.Александров