

О запутанных веревках и топологии полимерных цепей

С. НЕЧАЕВ

КАК ОЧИСТИТЬ АПЕЛЬСИН, не снимая с него кожу? Можно ли приготовить омлет из неразбитых яиц? Удастся ли гладко (без макушек) причесать волосатый бильярдный шар или тор (бублик), на котором вдруг выросли волосы? Почему нельзя завязать узел на телеграфном проводе, тянущемся вдоль линии железной дороги? Эти и подобные, часто занимательные, а иногда кажущиеся наивными, вопросы имеют непосредственное отношение к топологии. Нас же будет интересовать довольно узкий круг проблем, связанных с так называемой низкоразмерной топологией, т.е. с топологией систем, содержащих длинные перепутанные линейные нити совершенно различной физической природы. В качестве таких объектов могут выступать полимерные цепи, вихревые линии в жидком гелии и сверхпроводниках, струны в квантовой теории поля и т.п.

Одной из классических проблем низкоразмерной топологии является проблема классификации узлов и зацеплений, а также задача построения топологических инвариантов узлов, т.е. таких характеристик линейных объектов (нитей), которые не зависят от формы нити, на которой этот узел завязан, и не меняются при непрерывных деформациях. Вообще, о настоящих узлах или зацеплениях можно говорить только в том случае, если концы нити отсутствуют – либо нить замкнута, либо концы уведены на бесконечность. Действительно, при наличии свободных концов мы всегда можем с помощью непрерывной деформации нити совместить любые две произвольные конфигурации друг с другом. Поэтому для незамкнутых нитей правильнее было бы говорить о квазиузлах, представляющих собой

узлы, завязанные на замкнутой кривой, составленной из самой нити и, скажем, отрезка, соединяющего концы нити. Однако в случае, когда узел имеет размер, существенно меньший, чем длина нити, разница между узлами и квазиузлами незначительна.

История донесла до нас имя одного из первых топологов-экспериментаторов Гордия, узел которого, по преданию, Александр Македонский, будучи не в силах развязать, просто разрубил. Как это ни удивительно, современная алгебраическая топология отчасти позаимствовала идею Александра Македонского для построения топологических инвариантов узлов. (В качестве введения в эту проблему полезно прочесть статью [1].) Впрочем, знание топологических инвариантов и умение классифицировать узлы и зацепления, увы, не помогает нам развязывать туго затянутые узлы на шнурках ботинок. Расплетая перепутавшиеся веревки, мы даже не удивляемся тому, что длинные нити, предоставленные самим себе, имеют особенность запутываться наиболее неприятным образом из всех возможных. Мы только горько вздыхаем, когда уже почти распутанный моток пряжи случайно падает на пол и попадает в лапы любопытному котенку, потому что прекрасно понимаем, что наш труд пошел насмарку и нужно заново начинать кропотливую работу.

Как правило, мы не задумываемся об истинных причинах такой «несправедливости», считая, что это одно из проявлений общего жизненного закона: неприятные вещи происходят чаще, чем приятные, и бутерброд обычно падает маслом вниз. И мы совершенно не отдаем себе отчета в том, что самопроизвольное запутывание длинных нитей управляется

законами теории вероятностей и является следствием неевклидовой геометрии *фазового пространства узлов*, т.е. такого гипотетического пространства, которое содержит все возможные узлы и в котором есть понятие *метрики*, или расстояния между соседними по сложности узлами: чем более различаются по топологическому типу узлы, тем больше между ними расстояние в этом пространстве. В топологии такое пространство называют *универсальной накрывающей*. В общем случае построение этого пространства и описание его свойств является исключительно сложной задачей. Тем не менее, для некоторых специальных случаев, к которым мы и перейдем чуть позже, это пространство может быть описано в наглядных геометрических терминах.

Итак, выясняется, что, для того чтобы строго по-научному распутать клубок веревок, необходимо сначала изучить теорию вероятностей, а затем еще и разобраться в том, что такое неевклидова геометрия Лобачевского – Римана.

Прежде чем двигаться дальше, отвлечемся ненадолго и обсудим некоторые физические системы, в которых топологические взаимодействия играют существенную роль. В самом начале уже упоминались полимеры – длинные цепи, состоящие из десятков и сотен тысяч последовательно соединенных элементарных блоков – *мономеров*. Объединение мономеров в цепные молекулы принципиальным образом меняет все статистические и динамические свойства рассматриваемых систем, в результате чего полимерные молекулы под влиянием случайных сил, действующих со стороны среды, могут флуктуировать, принимая весьма причудливые конфигурации в про-



странстве, в том числе и завязываясь в узлы. Наличие цепной структуры порождает целый ряд особенностей физического поведения макромолекулярных систем: так называемую *линейную память* (т.е. строго установленное положение каждого мономера вдоль цепи); ограничения на независимое перемещение мономеров благодаря наличию химических связей; большие пространственные флуктуации (т.е. даже отдельная макромолекула может рассматриваться как статистическая система с большим количеством степеней свободы). (Подробнее о физике полимеров можно прочитать в книжке [2].)

Наличие линейной памяти ведет к тому, что различные части полимерной молекулы, флуктуирующие в пространстве, не могут «проходить сквозь друг друга» непрерывным образом (без разрыва цепи). Для системы кольцевых цепей это означает, что топологически доступными друг для друга являются лишь те конфигурации, которые могут быть совмещены друг с другом с помощью непрерывного преобразования (рис.1).

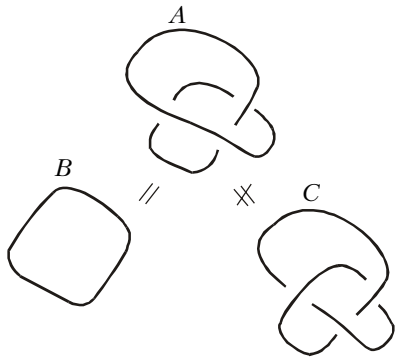


Рис.1. Непрерывной деформацией нити узел А можно совместить с узлом В, но нельзя совместить с узлом С

Очень часто полимеры моделируют траекториями случайного блуждания, при котором каждый следующий шаг случаен и совершенно независим от всех предыдущих. Такое движение часто также называют броуновским – в честь биолога Броуна, впервые наблюдавшего хаотическое движение микроскопических частичек цветочной пыльцы в жидкости. Наглядное представление о движении броуновских частиц дает игра в жмурки: водящий, у которого завязаны глаза, – это частица пыльцы, а приятели водящего, которых он хо-

чет догнать, играют роль случайных сил, действующих со стороны среды на частицу. Если допустить, что водящий каждый шаг делает в случайном направлении, нетрудно оценить, как далеко в среднем водящий отойдет от исходной точки за N шагов.

Пусть \vec{R}_N – вектор перемещения водящего за N шагов и пусть он делает шаги $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ равной длины a случайно в любом из направлений на юг, север, запад, восток (без предпочтения какого-либо направления). Представим \vec{R}_N (считая $\vec{R}_0 = 0$) в виде

$$\vec{R}_N = \overbrace{(\vec{R}_N - \vec{R}_{N-1})}^{\vec{a}_N} + \overbrace{(\vec{R}_{N-1} - \vec{R}_{N-2})}^{\vec{a}_{N-1}} + \dots + \overbrace{(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}^{\vec{a}_2} + \overbrace{(\vec{R}_1 - \vec{R}_0)}^{\vec{a}_1}.$$

Возводя в квадрат, получим

$$\vec{R}_N^2 = \vec{a}_N^2 + \vec{a}_{N-1}^2 + \dots + \vec{a}_1^2 + 2 \times$$

$$\times (\text{все члены вида } \vec{a}_j \vec{a}_k \text{ с } j \neq k).$$

Учитывая, что $a_j = a$, а значение всех перекрестных членов в среднем равно нулю, получаем, что водящий удалится от начальной точки за N шагов в среднем на расстояние

$$R_N \equiv \sqrt{R_N^2} = a\sqrt{N}.$$

Нетрудно прикинуть, сколько это: считая длину шага равной примерно одному метру, а число сделанных шагов равным, скажем, 100, получается, что расстояние по прямой между начальной и конечной точками в среднем составит всего $a\sqrt{N} = 10$ м, в то время как общая длина пройденного пути $aN = 100$ м.

Теперь мы можем оценить вероятность P_N того, что после N случайных шагов водящий окажется на расстоянии не более одного шага от той точки, откуда начал двигаться. Считая (очень грубо), что в пределах круга радиусом $R_N = a\sqrt{N}$ можно с равной вероятностью оказаться в любой точке (в том числе и в той, откуда вышел), вероятность P_N оценим как $P_N \approx a^2/S$, где $S = \pi R_N^2 = \pi a^2 N$ – площадь круга радиусом R_N . Для приведенных

выше значений $a = 1$ м и $N = 100$ получаем $P_N \approx 1/314$. Этот ответ надо понимать так: если играть в жмурки каждый день в течение 314 дней (т.е. около 10 месяцев) и водящий будет в каждой игре делать 100 шагов, то примерно 1 раз за все это время он *случайно* на последнем шаге окажется вблизи той точки, в которой он начал водить. Мало это или много? Все зависит от того, что с чем сравнивать...

Итак, возвращаясь от игры в жмурки к случайным блужданиям, нетрудно понять, что приведенные вычисления для P_N дают оценку вероятности того, что случайное блуждание из N шагов с длиной шага a , без учета каких-либо топологических взаимодействий, на плоскости образует замкнутую петлю (кольцо). Если случайное блуждание может располагаться во всем трехмерном пространстве, вероятность образования кольца после N шагов есть $P_N \approx a^3/V$, где $V = 4\pi R_N^3/3 = 4\pi(a\sqrt{N})^3/3$ – объем шара радиусом R_N .

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы попытаться ответить на наблевший вопрос: почему моток веревок, если его трясти и дергать концы веревок случайно в произвольные стороны, с гораздо большей вероятностью запутается, чем распутается?

Воспользуемся вновь геометрически наглядной аналогией с игрой в жмурки, но пусть теперь игра происходит в густом лесу и играющие бегают между деревьями. (*Предупреждение:* автор статьи не несет ответственности за последствия столкновений игроков с деревьями.) Нас будет интересовать вероятность того, что водящий после N шагов вернется в исходную точку *при условии, что траектория, по которой он двигался между деревьями, не зацепилась ни за одно дерево*. Уточним, что следует понимать под «незацепленными» за деревья траекториями. Если вдоль пути водящего (с момента выхода из начальной точки до момента возвращения в нее же) положить натянутую резиновую нить, то незацепленным за деревья траекториям отвечают такие конфигурации резинки, которые можно непрерывной деформацией (т.е. не разрывая нити) стянуть в точку (рис.2). Если этого сделать нельзя, то соответству-

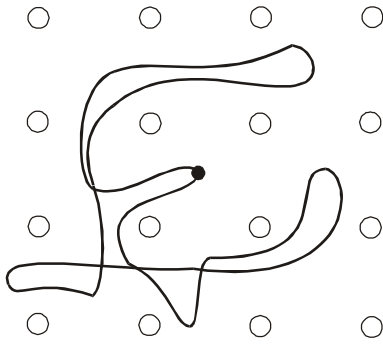


Рис.2. Пример траектории, не зацепленной за деревья

ющие траектории считаются зацепленными за деревья.

Откроем секрет: физики часто решают сходные геометрические задачи и даже используют в работе наглядные образы, подсмотренные в повседневной жизни, но при этом почему-то стесняются публиковать в серьезных научных журналах статьи, которые, скажем, назывались бы так: «О топологии игры в жмурки в лесу» или «О вероятности развязывания шнурков при быстрой ходьбе». Вместо этого ученые с серьезным видом предпочитают говорить и писать об узлах в полимерных системах или о топологии вихревых линий в сверхпроводниках.

Ну что ж, раз так принято, не будем нарушать традицию и скажем, что модель ИЖЛ – Игра в Жмурки в Лесу – является в настоящее время общепризнанной моделью, описывающей термодинамические свойства системы большого числа полимерных цепей с топологическими ограничениями. При этом обычно предполагается, что решетка препятствий (лес) моделирует зацепления «пробной» цепи (траектории водящего) за другие цепи системы («внешней среды»). Пренебрегая флуктуациями среды (т.е. считая, что деревья стоят на месте), а также топологическими ограничениями, которые пробная цепь создает сама для себя (водящий может спокойно несколько раз проходить по одному и тому же месту), мы теряем информацию о том, как влияет пробная цепь на среду, однако даже в этом случае можем сделать интересные выводы о статистике пробной цепи.

Трехмерную модель ИЖЛ можно определить следующим образом. Пусть случайное блуждание из N шагов помещено между ребрами кубической решетки и траектория не

может пересекать («проходить сквозь») никакое ребро решетки. Эта система уже содержит основные черты клубка перепутанных веревок: ребра решетки – это участки различных нитей, создающих топологические ограничения, а случайное блуждание – это нить, которую мы хотим выпутать из клубка, хаотически держа ее в разные стороны. Таким образом, для того чтобы ответить на вопрос о вероятности случайного выпутывания нити, необходимо вычислить вероятность того, что нить, флуктуируя, случайно образует замкнутое кольцо, не зацепленное за ребра решетки.

Начнем с двумерного решеточного варианта модели ИЖЛ. В этом случае траектория водящего – это случайное блуждание по ребрам квадратной решетки, а деревья (препятствия) расположены на решетке, сдвинутой на половину периода (рис. 3,а). На каждом шаге у водящего есть 4 одинаковые возможности пойти в разные стороны, но если мы хотим, чтобы после N шагов траектория была замкнута и не зацеплена за деревья, необходимо, чтобы водящий сделал столько же шагов на юг, сколько на север, и столько же шагов на запад, сколько на восток, и чтобы траектория полностью состояла из «шпилек», т.е. сложенных вдвое, четверо и т.д. кусков – только в этом случае траектория не будет зацеплена за деревья. Иными словами, траектория водящего должна иметь структуру случайно ветвящегося дерева, составленного из участков, пройденных «туда и обратно». Будем постепенно «стягивать» траекторию, считая ее резиновой. Тогда, последовательно сокращая шпильки, получим траекторию, которая может быть полностью стянута в точку.

Таким образом, мы показали, что

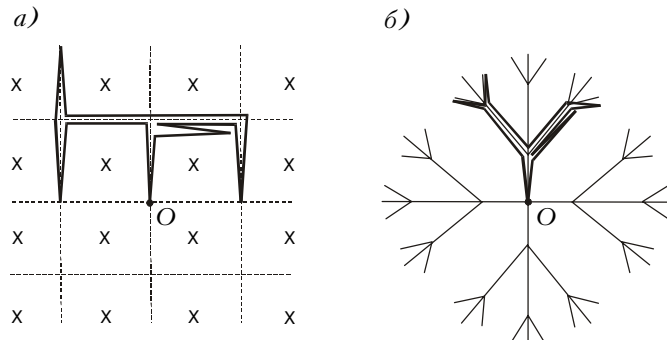


Рис.3. а) Решеточная версия модели ИЖЛ; б) соответствующая траектория на дереве Кейли

древесная структура *достаточна* для стягиваемости траектории. Доказательство же *необходимости* того, что траекторию водящего можно стянуть в точку непрерывной деформацией, если соответствующая траектория может быть представлена в виде пути на дереве, мы представим читателю провести самостоятельно.

Итак, у нас есть два условия: а) траектория должна быть замкнутой и б) траектория должна иметь вид случайно ветвящегося дерева. Оба эти условия выполняются, если считать, что случайное блуждание происходит на графе, имеющем структуру дерева с четырьмя ветвями (рис. 3,б). В самом деле, на таком графе, имеющем название дерева Кейли, нет другой возможности после N шагов вернуться в исходную точку, как пройти по каждой ветви дерева вперед-назад, сделав шпильку. Нетрудно подсчитать, как далеко мы уйдем по дереву Кейли от некоторой начальной точки («корня») за N случайных шагов. На каждом шаге у нас имеется 3 возможности из 4 пойти от корня (в направлении «+») и к корню (в направлении «-»). Соответственно, среднее расстояние $\langle K_N \rangle$, на которое можно уйти за N шагов, есть

$$\langle K_N \rangle = \left(\frac{3}{4} \cdot (+1) + \frac{1}{4} \cdot (-1) \right) N = \frac{1}{2} N.$$

Теперь, для того чтобы грубо оценить вероятность возвращения при случайном блуждании по дереву Кейли в исходную точку (в корень дерева), вновь воспользуемся оценкой $P_N \approx 1/S$, где S – число всех вершин дерева Кейли внутри радиуса $K = \langle K_N \rangle$. Величину S можно вычислить по геометрической прогрессии: в точке $K = 0$ имеется одна вершина (корень дерева), на рассто-

янии $K = 1$ от корня имеется 4 вершины, на расстоянии $K = 2$ от корня имеется $4 \cdot 3$ вершин, ..., на произвольном расстоянии K от корня имеется $4 \cdot 3^{K-1}$ вершин. Суммируя, получаем

$$S = 1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \dots + 4 \cdot 3^{K-1} = 1 + 4 \frac{3^K - 1}{3 - 1} = 2 \cdot 3^K - 1,$$

что при $K = \langle K_N \rangle = \frac{1}{2} N$ ($N \gg 1$) дает

$$S = 2(\sqrt{3})^N - 1 \approx 2(\sqrt{3})^N.$$

Следовательно, вероятность возвращения в исходную точку можно оценить как $P_N \approx 1 / (2(\sqrt{3})^N)$, что при $N = 100$ составляет примерно $P_N \approx 1 / (1,43 \cdot 10^{24})$. Это означает, что если играть в жмурки в лесу каждый день, то примерно 1 раз в $4 \cdot 10^{21}$ лет водящий не только случайно вернется в начальную точку, но и его траектория из 100 шагов случайно окажется незацепленной за деревья!

Соответственно, в трехмерном пространстве вероятность случайного самопроизвольного выпутывания нити из решетки топологических препятствий оценивается как $P_N \approx 1/V$, где V – «объем» дерева Кейли, отвечающего блужданию на кубической решетке. В этом случае в каждой вершине дерева есть 6 возможностей пойти по разным направлениям, так как дерево Кейли имеет 6 ветвей. Вычисляя V точно так же, как это делалось для площади S , получим

$$V = 1 + 6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 + \dots + 6 \cdot 5^{(K_N)-1} = 1 + 6 \frac{5^{(K_N)} - 1}{5 - 1} = \frac{3}{2} \cdot 5^{(K_N)} - \frac{1}{2},$$

где

$$\langle K_N \rangle = \left(\frac{5}{6} \cdot (+1) + \frac{1}{6} \cdot (-1) \right) N = \frac{2}{3} N,$$

откуда

$$P_N \approx \frac{2}{3(\sqrt[3]{25})^N}.$$

Этот результат и даст ответ на вопрос, почему, случайно дергая верев-

ку, находящуюся в плотном клубке, ее практически невозможно выпутать – *вероятность такого события чрезвычайно мала!*

Таким образом, практический вопрос о распутывании веревок разрешен, и теперь можно подумать, откуда взялось дерево Кейли и каким образом удалось незаметно подменить задачу о случайном блуждании среди топологических препятствий задачей о блуждании без каких-либо ограничений на дереве, имеющем структуру дерева Кейли.

Дерево Кейли – это аналог фазового пространства узлов, мимоходом упомянутого в начале статьи. Хотя в данном случае правильнее говорить о пространстве зацеплений, каждая точка которого (т.е. каждая вершина дерева Кейли) отвечает вполне определенному типу зацепления траектории случайного блуждания за решетку препятствий. Внимательный читатель сразу же заметит, что многие вершины дерева Кейли соответствуют одной и той же точке на плоскости с топологическими препятствиями, но при этом разные вершины дерева отвечают разным топологическим состояниям. Тем самым, каждая точка дерева Кейли несет информацию как о геометрическом положении конца траектории случайного блуждания, так и о топологии пути в модели ИЖЛ.

Попробуем нарисовать дерево Кейли на листе бумаги. Выберем точку и будем считать ее корнем дерева. С 1-ым поколением проблем нет – мы всегда можем нарисовать 4 ветви, выходящие из корня так, что соседние ветви образуют прямые углы друг с другом. А вот что делать дальше, если мы хотим, чтобы все ветви имели одну и ту же длину, чтобы угол между соседни-

ми ветвями, выходящими из одной точки, был один и тот же и чтобы никакие ветви не касались, не накладывались и не пересекались? Ну хорошо, выбрав в следующем поколении угол поменьше, мы продвинемся дальше и сможем нарисовать без пересечений еще 2–4 поколения. А потом? После нескольких (возможно, и нескольких десятков) не очень удачных попыток нам придется смириться с тем фактом, что на листе бумаги построить дерево Кейли без наложений, самопересечений, с одной и той же длиной ветви и одинаковыми углами между соседними ветвями, т.е. *изометрически*, нельзя.

Все это означает, что дерево Кейли не вкладывается в евклидову плоскость, и возникает вопрос о том, как должна быть устроена поверхность, в которой можно изометрически (т.е. без пересечений и наложений) уложить дерево Кейли. Подсчитаем, как растут периметр и площадь дерева Кейли. Периметром P назовем число вершин дерева Кейли, находящихся на расстоянии K шагов от корня (где K играет роль радиуса), тогда $P = 4 \cdot 3^{K-1}$. Площадь мы уже вычисляли – это количество всех вершин дерева Кейли, лежащих от корня на расстоянии *не больше* чем K : $S = 2 \cdot 3^K - 1$. Таким образом, при $K \rightarrow \infty$

$$\frac{P}{S} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

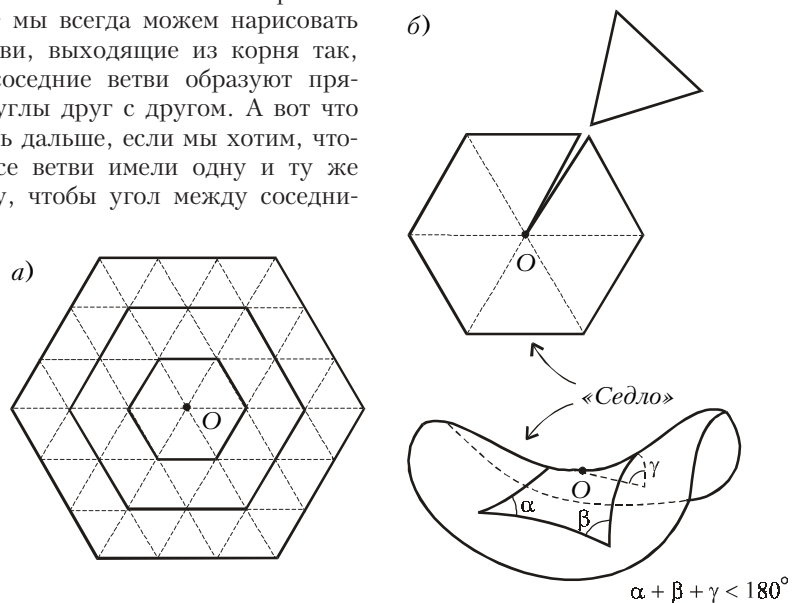


Рис.4. а) Плоскость, замощенная ячейками – равносторонними треугольниками; б) начальный этап построения плоскости Лобачевского, которую нельзя изометрически вложить в плоскость

Напомним, что в любом обычном (евклидовом) пространстве, например на плоскости, отношение периметра круга радиусом R к его площади есть

$$\frac{P}{S} = \frac{2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2}{R},$$

и при $R \rightarrow \infty$ $\frac{P}{S} \rightarrow 0$.

В дискретном случае, если плоскость замощена ячейками – равно-сторонними треугольниками со стороны, равной 1 (рис.4,а), нетрудно подсчитать отношение числа P_K вершин треугольников, лежащих на границе равностороннего шестиугольника с центром в точке O и вписанного в окружность радиусом K , к числу S_K всех вершин треугольников, принадлежащих данному равностороннему шестиугольнику. В зависимости от K ($K = 0, 1, 2, \dots$) величина P_K растет так: 1, 6, $6 \cdot 2$, $6 \cdot 3$, $6 \cdot 4$, ..., $6 \cdot K$, в то время как S_K можно вычислить по формуле

$$S_K = 1 + \sum_{j=1}^K P_j, \text{ что дает } S = 1 + 3(K+1)K. \text{ Следовательно, при } K \rightarrow \infty$$

$$\frac{P_K}{S_K} \rightarrow 0.$$

Обратимся теперь к бумаге, ножницам и клею. Вырежем из бумаги равносторонний шестиугольник, разрежем его по радиусу, как показано на рисунке 4,б, и вклеим между разрезами «выточку» в виде равностороннего треугольника. В результате получим «равносторонний се-

миугольник», который, однако, не является плоским. Имея в наличии достаточное количество равносторонних треугольников, будем приклеивать их по периметру семиугольника таким образом, чтобы в каждой новой вершине сходились ровно семь треугольников. Как и в предыдущем случае, подсчитаем отношение числа \tilde{P}_K вершин треугольников, лежащих на границе семиугольника с центром в точке O , к числу \tilde{S}_K всех вершин треугольников, принадлежащих данному семиугольнику, нарисованному на неплоской(!) поверхности. Получим, что, в зависимости от удаления от центра, \tilde{P}_K удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению (докажите это самостоятельно):

$$\tilde{P}_K = 3\tilde{P}_{K-1} - \tilde{P}_{K-2},$$

$$\tilde{P}_1 = 7, \tilde{P}_2 = 21$$

и растет так:

$$\tilde{P}_K = \frac{7}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^K - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^K \right).$$

Вычисляя \tilde{S}_K по формуле, приведенной выше, убедимся в том, что отношение $\tilde{P}_K / \tilde{S}_K$ стремится к отличной от нуля константе: при $K \rightarrow \infty$

$$\frac{\tilde{P}_K}{\tilde{S}_K} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \approx 0,618.$$

Это означает, что на полученной поверхности уже почти хватает места для того, чтобы нарисовать дерево Кейли без наложений и самопересечений так, что всем веточкам хватит места. Если бы мы вклеивали в шестиугольник не один, а два треугольника и вычисляли бы отношение $\tilde{P}_K / \tilde{S}_K$ для «восьмиугольников», то места для всех веточек дерева Кейли хватило бы с избытком!

Поверхность, склеенная таким образом, вблизи каждой вершины по структуре напоминает седло и является геометрическим образом поверхности постоянной отрицательной кривизны, называемой также *плоскостью Лобачевского*. Она обладает многими удивительными свойствами – например, сумма углов равностороннего треугольника, нарисованного на такой поверхности, меньше

180° , а отношение длины окружности, нарисованной на такой поверхности, к площади соответствующего круга всегда стремится к отличной от нуля константе.

Если же мы все-таки захотим нарисовать дерево Кейли на плоскости, то единственный способ сделать это заключается не в использовании тяжелого уголка для пригладивания упрямо топорщащихся веточек, а в том, чтобы последовательно от поколения к поколению в геометрической прогрессии уменьшать длину ветвей, как показано на рисунке 5. (Наверное, многие из читателей обратили внимание на то, что при этом получилась картинка, схематически напоминающая известную гравюру Мориса Эшера «Предел на круге IV». И это совершенно не случайно. Рисунок голландского художника, построенный по принципу инверсии точек относительно окружности, является прекрасным геометрическим образом неевклидовой плоскости (плоскости Лобачевского) в модели, предложенной Анри Пуанкаре.)

(Множество интересных геометрически наглядных иллюстраций весьма непростых тополого-алгебраических понятий можно найти в книге [3]. Тем, кого более глубоко заинтересовали физические проблемы топологии, можно посоветовать прочитать статью [4].)

Вот и все. Хотя не совсем. Однажды сороконожка задумалась над тем, как ей удастся так ловко переставлять все 40 ног, что они не переплетаются. Подумав об этом, она немедленно сбилась и упала, так как 27 из 40 ее ног безнадежно запутались... Я бы не хотел, чтобы читатели этой статьи, почувствовав математическую сложность и глубину топологических проблем, разучились завязывать шнурки на ботинках. Не бойтесь ничего и дерзайте!

Рекомендуемая литература

- [1] А.Б.Сосинский. *Узлы, зацепления и их полиномы*. – Квант, 1989, №4.
- [2] А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов. *Физика в мире полимеров*. – М.: Наука, 1989. (Серия: Библиотечка «Квант», вып.74.)
- [3] К.Б.Левитин. *Геометрическая рhapsодия*. – М.: Знание, 1984.
- [4] С.К.Нечаев. *Проблемы вероятностной топологии: статистика узлов и некомутативных случайных блужданий*. – УФН, 168 (1998).

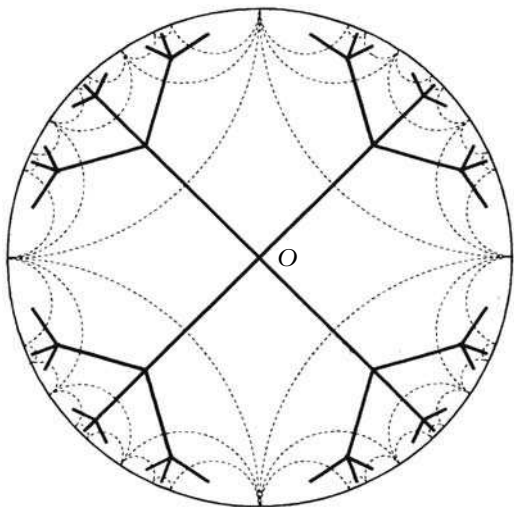


Рис.5. Плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре