ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Очевидно, что А = 0, Л = 1. Далее, перебирая различные М (2, 3, ..., 9), приходим к выводу, что имеет место единственный случай М = 6. А значит, зашифрованная запись имеет вид

$$\begin{array}{r} 70660 \\ +\;35760 \\ \hline 106420 \end{array}$$

2. Исходное число делится на 23 (в этом можно убедиться, например, разделив 255…53 на 23 «уголком»).

3. Пусть Валера собрал x мешков. Тогда, согласно условию, Саша собрал в 5 раз больше, т.е. $5x$ мешков. Андрей же собрал на 10 мешков меньше Саши, т.е. $(5x - 10)$ мешков. Опять же по условию, Саша собрал больше половины всех мешков, т.е. больше, чем Валера вместе с Андреем. Поэтому

$$5x > x + (5x - 10),$$

откуда $x < 10$.

Всего «Егорушки» собрали $x + 5x + (5x - 10) = 11x - 10$ мешков. Так как Валере удалось поделить эти мешки поровну между всеми тремя членами группы, то $(11x - 10)$ делится на 3. Среди всех целых неотрицательных x, меньших 10, этому требованию удовлетворяют лишь $x = 2$, 5 и 8. Какое же из них верное?

Вспомним малозаметную, но немаловажную часть условия: Валера с целью уравнять число мешков отобрал несколько мешков *у каждого* из приятелей, т.е. и у Саша, и у Андрея. Отсюда следует, что и Саша, и Андрей собрали *более чем по трети* всех мешков (иначе им пришлось бы, наоборот, добавить мешков). С Сашей все это и без того очевидно (он, как мы знаем, собрал больше всех, т.е. заведомо больше трети всех мешков). Что же касается Андрея, то данное требование может привести к дополнительным ограничениям. Итак, всего было собрано $(11x - 10)$ мешков, и третья их часть, т.е. $(11x - 10)/3$ мешков, должна быть меньше, чем собрал Андрей, т.е. $(5x - 10)$. Получаем еще одно неравенство:

$$(11x - 10)/3 < (5x - 10),$$

откуда $x > 5$. Этому неравенству удовлетворяет лишь одна из трех найденных выше кандидатур, а именно $x = 8$.

Остальное не представляет затруднений. Итак, Валера собрал $x = 8$ мешков, Саша – $5x = 40$ мешков, а Андрей – $5x - 10 = 30$ мешков. Всего же «Егорушки» собрали 8 + 40 + + 30 = 78 мешков пуха. На клип должно хватить!

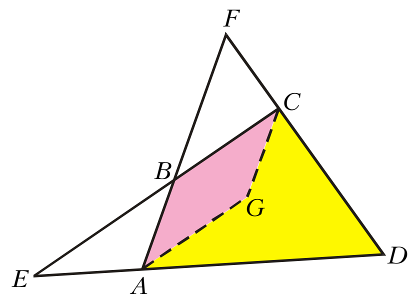

Рис. 1

3. Закрасим клетки поля в шахматном порядке двумя цветами. В силу того что клеток поля нечетное количество, клеток одного цвета будет на 1 больше, чем клеток другого цвета. Каждый же танцор в хороводе должен иметь возможность переместиться на клетку своего соседа, сменив цвет клетки, на которой он пребывает. Но это сделать невозможно.

5. Даша права. Если четырехугольник является трапецией, то очевидно, что параллелограмм вырезать можно. Если четырехугольник $ABCD$ не имеет параллельных сторон, то продолжим противоположные стороны AB, CD и AD, BC до пересечения: получим точки F и E (рис.1). Концы сторон, за которыми пересеклись прямые – в нашем случае это A, B, C, – и будут вершинами исходного параллелограмма. Действительно, луч AG, параллельный BC, будет находиться внутри угла CED; луч CG, параллельный AB, – внутри угла AFD. Т.е. точка пересечения лучей G будет находиться в пересечении этих углов, а значит, в четырехугольнике $ABCD$.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6—8»

(см. «Квант» №6 за 1999 г.)

11. Поскольку значения $x = 0$, $y = 0$, $y = -1$ и $y = 1$ не входят в область допустимых значений выражения $\dfrac{x - \frac{1}{x}}{y - \frac{1}{y}}$, то примем в дальнейшем, что $xy \neq 0$, $|y| \neq 1$, и запишем исходное тождество в виде $k = \dfrac{(x^2 - 1)y}{(y^2 - 1)x}$.

В случае $|x| = 1$ получаем одно из возможных решений: $k = 0$. Рассмотрим случай $|x| \neq 1$. Числа $y^2 - 1$ и $|y|$, как и числа $x^2 - 1$ и $|x|$, взаимно просты. Отсюда $x^2 - 1 = a(y^2 - 1)$, $y = bx$, где числа a и b целые, причем $a \geq 1$, $|b| \geq 1$. Из неравенства $a \geq 1$ следует $|x| \geq |y|$, а из неравенства $|b| \geq 1$ – неравенство $|y| \geq |x|$, поэтому $|x| = |y|$. Следовательно, $k = -1$

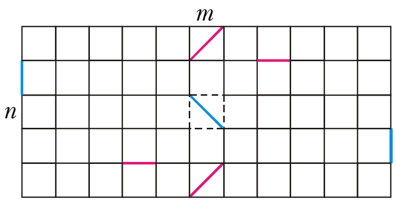

Рис. 2

или $k = 1$. Оба значения реализуются, например, $k = -1$ при $(2, -2)$ и $k = 1$ при $(2, 2)$.
Ответ: число k равно одному из чисел -1, 0, 1.

12. Приведем решение для доски $m \times n$ клеток, где m и n – нечетные натуральные числа. Первый ход первого игрока должен быть «несимметричным»: выберем на доске центральную клетку и проведем в ней одну из диагоналей. Все последующие ходы первого игрока должны быть симметричными ходам второго игрока относительно центра доски (рис.2). Ясно, что первый игрок не нарушит условие игры ранее второго игрока.

Если число клеток по одной стороне четно, а по другой – нечетно, то начинающему следует провести центральный отрезок на оси прямоугольника и далее играть аналогично, как в случае нечетных m и n.

Рассмотрим случай четных m и n. Пусть $m = 2k$, $n = 2d$. Тогда число клеток в прямоугольнике $m \times n$ четно и число всех отрезков, проходящих по сторонам клеток (не по диагоналям клеток), равное $2k(2d+1) + 2d(2k+1)$, тоже четно. Учитывая то, что в каждой клетке может быть проведена только одна диагональ и дважды проводить один и тот же отрезок нельзя, второй игрок должен придерживаться следующей стратегии: если начинающий игрок проводит отрезок по некоторой стороне квадрата, то второй игрок тоже должен провести любой отрезок по свободной стороне квадрата; если начинающий игрок проводит отрезок по диагонали квадрата, то второй игрок тоже проводит любой свободный диагональный отрезок и т.д. Очевидно, второй игрок может всегда обеспечить себе ход и, следовательно, в этом случае он выигрывает.
Ответ: при правильной игре выигрывает первый игрок, если хотя бы одно из значений m и n нечетное, и второй игрок – если m и n четные.

13. Преобразуем алгебраическую сумму
$$y^4x^3 + z^4y^3 + x^4z^3 - x^4y^3 - y^4z^3 - z^4x^3$$
к виду
$$(x-y)(z-y)(x-z) \times$$
$$\times\left[x^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + xyz(x+y+z)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(x-y)(z-y)(x-z) \times$$
$$\times\left[x^2(y+z)^2 + y^2(x+z)^2 + z^2(x+y)^2\right].$$
Это выражение равно нулю только тогда, когда среди чисел x, y, z есть два равных (выражение в квадратных скобках равно нулю лишь тогда, когда по крайней мере два из трех чисел x, y, z равны нулю).

14. Заметим, что число, дающее при делении на 6 остаток 5, во-первых, должно быть нечетным, во-вторых, – при делении на 3 давать остаток 2.

Попытаемся сконструировать такое число, приписывая к числу 1 справа последовательные натуральные числа. Поскольку искомое число должно быть нечетным, то каждый раз нам придется приписывать по 2 очередных натуральных числа, старшее из которых – число нечетное. Остаток от деления на 3 полученного числа оценим по сумме его цифр. Несложно показать, что остатки от деления на 3 сцепки из каждой пары натуральных чисел, начиная с 2, образуют периодическую последовательность: 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, … Таким образом, после приписывания каждой такой пары сумма цифр полученного числа при делении на 3 будет давать остатки 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, … В этой периодической последовательности нет числа 2. Следовательно, среди вводимых чисел не найдется числа, дающего при делении на 6 остаток 5, и Гадалка никогда не предскажет «к черту пошлет».

15. Покажем, что испытуемых «пятерок» должно быть не менее 18. Пронумеруем всех игроков от 1 до 18. Игрока с номером 1 нужно испытать в паре с 17 другими игроками. Поскольку в каждой «пятерке» он может образовать только 4 различных пары, то для этого его нужно включить в состав не менее чем 5 «пятерок». Точно так же любой из 18 игроков должен выходить на игровое поле не менее 5 раз. Это возможно лишь в том случае, когда количество «пятерок» не менее 18.

Один из возможных наборов из 18 «пятерок» показан в таблице:

№«пятерки»	*Состав игроков*
1	6 7 10 15 17
2	6 8 12 13 18
3	6 9 11 14 16
4	5 9 10 14 18
5	5 7 12 15 16
6	5 8 11 13 17
7	4 8 12 14 17
8	4 7 10 13 16
9	4 9 11 15 18
10	3 8 10 15 16
11	3 9 12 13 17
12	3 7 11 14 18
13	1 2 16 17 18
14	1 2 13 14 15
15	1 2 10 11 12
16	1 2 7 8 9
17	2 3 4 5 6
18	1 3 4 5 6

Малая теорема Ферма

1. а) В последовательности 2, 4, 8, $16 \equiv 3$, 6, 12, $24 \equiv 11$, $22 \equiv 9$, $18 \equiv 5$, 10, $20 \equiv 7$, $14 \equiv 1$ встречаются все остатки от 1 до 12.

2. а) 2 и 3; б) числа вида $3 + 7k$ и числа вида $5 + 7k$, где k – целое.

3. Нельзя. Составное число n делится на некоторое простое число $q < n$. Рассмотрим то место на окружности, где находится q, и возьмем q в качестве первого из трех чисел a, b, c. Имеем:
$$b^2 \equiv ac \equiv 0 \pmod{q},$$
так что b делится на q. Двигаясь далее вдоль окружности и рассуждая аналогично, придем к абсурду: все числа 1, 2, … …, $n-1$ должны делиться на q.

5. *Указание*. Во-первых, $2^n \equiv 3 \pmod 5$ при $n \equiv 3 \pmod 4$. Во-вторых, $2^n \equiv 3 \pmod{13}$ при $n \equiv 4 \pmod{12}$. В первом случае n должно быть нечетным числом, а во втором – четным.

6. *Ответ*: $p = 13$.

9. б) $m = 1$ или 2.

10. Поскольку $a - b^n = \left(a - k^n\right) + \left(k^n - b^n\right)$ кратно $k - b$, то $a - b^n$ делится на любое натуральное число. Следовательно, $a - b^n = 0$, что и требовалось доказать.

11. а) Рассмотрим остатки от деления чисел 1, 11, 111, … на n. Какие-то два из них равны; разность соответствующих чисел кратна n; эта разность оканчивается на несколько нулей, которые можно отбросить, поскольку n взаимно просто с 10.

12. а) $8^n + 1 = \left(2^n\right)^3 + 1^3$ кратно числу $2^n + 1$; $5 \cdot 4^n + 1 = 5 \cdot (3+1)^n + 1 \equiv 5 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. б) Таковы, например, числа вида $10^{12k+1} + 3 \equiv 10 + 3 \equiv 0 \pmod{13}$. Составными являются и все числа вида $10^{6k+4} + 3$, поскольку $10^{6k+4} + 3 =$

$=\left(10^6\right)^k\cdot 10^4+3\equiv 1\cdot 3^4+3=84\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, 7)$. в) *Указание.* Пусть p – простой делитель числа $ab+c$. Существует бесконечно много таких натуральных n, что $b^n\equiv b\ (\mathrm{mod}\, p)$.

13. Порядок числа a является делителем чисел r и s и потому является делителем числа НОД(r,s).

14. При k, кратных 18.

16. Например, $k=\varphi\left(10^{100}\right)$.

18. *Указание.* $2^6+6^2=100$. Докажите, что если число n обладает нужным свойством, то число $n+100$ тоже обладает им.

19. При $p=2$ годится любое четное n. Пусть $p>2$ и $n=(p-1)m$. Тогда $2^n\equiv 1$ и $n\equiv -m\ (\mathrm{mod}\, p)$, так что в качестве m можно взять любое натуральное число вида $m=ps-1$, где $s=1,2,3,\ldots$

21. а) 20; б) 20.

22. а) *Указание.* Поскольку 2000 делится и на $\varphi\left(2^4\right)=8$, и на $\varphi\left(5^4\right)=4\cdot 5^3$, имеем: $3^{2000}\equiv 1$ и по модулю 2^4, и по модулю 5^4. Следовательно, $3^{2000}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, 10000)$. *Ответ*: $3^{1999}=\ldots 6667$.

б) Поскольку $\varphi\left(5^4\right)=5^3\cdot(5-1)=500$, то $2^{2000}=\left(2^{500}\right)^4\equiv 1\equiv -624\ \left(\mathrm{mod}\, 5^4\right)$, так что $2^{1999}\equiv -624/2=-312\equiv 313\ \left(\mathrm{mod}\, 5^4\right)$. Осталось подобрать такое целое x, что $313+625x$ делится на 16. Это легко: $313=320-7\equiv -7$ и $625=624+1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, 16)$, так что годится $x=7$. Значит, 2^{1999} оканчивается теми же четырьмя цифрами, что и число $313+625\cdot 7=4688$.

в) *Указание.* $10000=16\cdot 625$. Число $2^{3^{2000}}$ кратно 16. В силу теоремы Эйлера, остаток от деления 3^{2000} на 500 равен 1; поскольку $\varphi(625)=500$, имеем: $2^{3^{2000}}\equiv 2\ (\mathrm{mod}\, 625)$. Осталось подобрать такое целое x, что $2+625x$ делится на 16.
Ответ: 8752.

23. Достаточно разобрать случай $x\neq y$. Поскольку $1998=2\cdot 3^3\cdot 37$, достаточно доказать отсутствие решений в натуральных взаимно простых числах x, y, где $x\neq y$, и целых неотрицательных числах a, b, c уравнения $x^7+y^7=2^a\cdot 3^b\cdot 37^c$. Обозначим $N=2^a\cdot 3^b\cdot 37^c$ и $f=\varphi(N)$. Поскольку f не делится на 7, существует такое натуральное число t, что $7t\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, f)$.
Возводя сравнение $x^7\equiv -y^7\ (\mathrm{mod}\, N)$ в t-ю степень, получаем: $x^{7t}\equiv\left(-y^7\right)^t$. Очевидно, число t нечетно (ибо f четно). Поэтому $x\equiv x^{7t}\equiv\left(-y^7\right)^t=-y^{7t}\equiv -y\ (\mathrm{mod}\, N)$, так что $x+y$ делится на $N=x^7+y^7$, что невозможно из-за неравенства $x+y<x^7+y^7$.

24. Пусть $k-1$ делится на 2^s и не делится на 2^{s+1}. Предположим, что при всех достаточно больших натуральных l число $p=2^{2^l}+k$ простое. Очевидно, если $2^l>s$, то $p-1=2^{2^l}+k-1=2^s h$, где h нечетно.
В силу теоремы Эйлера, $2^{\varphi(h)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, h)$. Поэтому $2^{s+\varphi(h)}\equiv 2^s\ \left(\mathrm{mod}\, 2^s h\right)$. Следовательно, при $l\geq s$ имеем $2^{l+\varphi(h)}\equiv 2^l\ (\mathrm{mod}\, p-1)$.
В силу малой теоремы Ферма,

$$2^{2^{l+\varphi(h)}}+k\equiv 2^{2^l}+k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p).$$

Поскольку $2^{2^{l+\varphi(h)}}+k>2^{2^l}+k=p$, то число $2^{2^{l+\varphi(h)}}+k$ составное. Задача решена.

25. а) $n=1$, p^m или $2p^m$, где p – простое, m – натуральное.

26. а) *Ответ*: $x\equiv\pm a$ или $2^{m-1}\pm a\ \left(\mathrm{mod}\, 2^m\right)$. *Указание.* Поскольку $(x+a)-(x-a)=2a$, числа $x-a$ и $x+a$ не могут оба делиться на 4. Значит, либо одно из них делится на 2^m, либо одно делится на 2^{m-1}, а другое четно.

27. *Указание.* Докажите по индукции сравнения $5^{2^{m-3}}\equiv 1+2^{m-1}\ \left(\mathrm{mod}\, 2^m\right)$, где $m\geq 3$, и $(1+p)^{p^{m-2}}\equiv 1+p^{m-1}\ \left(\mathrm{mod}\, p^m\right)$, где p – нечетное простое, $m\geq 2$.

28. г) Всякое натуральное число вида $6m-1$ имеет хотя бы один простой делитель вида $p=6k-1$. Пусть a^2+a+1 кратно p. Тогда $a^3-1=(a-1)\left(a^2+a+1\right)$ тоже кратно p. Если $a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, p)$, то $a^2+a+1\equiv 1^2+1+1=3$, что невозможно, ибо $p\neq 3$. Значит, порядок числа a по модулю p равен 3, откуда $p-1$ кратно 3. Но $p-1=6k-2$ не кратно 3.

29. *Указание.* $a^{12}-1=\left(a^6-1\right)\left(a^2+1\right)\left(a^4-a^2+1\right)$.

30. в) *Указание.* $a^{15}-1=(a-1)\left(a^2+a+1\right)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)\times\left(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1\right)$.

31. *Указания.* а) В силу предыдущего упражнения $a+1\equiv -a^2\ (\mathrm{mod}\, p)$. б) Докажите, что $a^3-a^2+a-1\equiv a^4\ (\mathrm{mod}\, p)$.

33. *Указание.* Существует такое целое c, что $bc\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, p)$. Число $(ac)^{2^n}+1$ кратно p.

34. *Указание.* Если p – простой общий делитель чисел n и $a^{2^n}+1$, то $p\leq n$ и $p=2^{n+1}k+1>2^{n+1}>n$.

35. а) Пусть n четно и a^n+1 делится на $n+1$. Записав $n=2^m k$, где k – нечетное, имеем: любой простой делитель числа $a^n+1=\left(a^k\right)^{2^m}+1$ сравним с 1 по модулю 2^{m+1}.
Поскольку произведение чисел, сравнимых с 1 по модулю 2^{m+1}, тоже сравнимо с 1 по этому модулю и поскольку $n+1=2^m k+1\not\equiv 1\ \left(\mathrm{mod}\, 2^{m+1}\right)$, получаем противоречие.
Итак, n нечетно. Теперь очевидно, что a тоже нечетно.
б) *Указание.* Рассмотрите $n=a^{a^m}$.

36. а) Следует из предыдущего упражнения. б) Убедитесь, что если 2^n+2 кратно n и если 2^n+1 кратно $n-1$ (это верно, например, для $n=2$), то $2^{2^n+2}+2$ кратно 2^n+2 и $2^{2^n+2}+1$ кратно 2^n+1.

37. Пусть $15a+16b=r^2$ и $16a-15b=s^2$, где r, s – натуральные числа. Тогда $r^4+s^4=(15a+16b)^2+(16a-15b)^2=\left(15^2+16^2\right)\left(a^2+b^2\right)=13\cdot 37\cdot\left(a^2+b^2\right)$. Поскольку число 13 не имеет вида $8k+1$, а r^4+s^4 делится на 13, то $r\equiv s\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, 13)$.
Аналогично, $r\equiv s\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, 37)$.
Ответ: $13^2\cdot 37^2$ (при $a=13\cdot 37\cdot 31$, $b=13\cdot 37$).

39. Примените утверждение предыдущего упражнения:
а) при $a=8$; б) при $a=512$.

40. Достаточно разобрать случай $a\neq b$. Числа a и b нечетны. Обозначим буквой n их наименьшее общее кратное. Тогда 2^n+1 кратно числу 2^a+1, которое кратно числу b. Аналогично, 2^n+1 кратно 2^b+1, которое кратно a. Значит, 2^n+1 кратно как a, так и b, а следовательно, и их наименьшему общему кратному n. Поскольку $n>3$, то, в силу пункта а) предыдущего упражнения, n кратно 9.
Предположим для определенности, что a не кратно 3. Тогда легко проверить, что 2^a+1 не делится на 9. Это противоречит тому, что b делится на 9.

41. *Указание.* Пусть $n>3$ и 2^n+1 кратно n^2. Представим n в виде $n=3^a m$, где m не кратно 3. Тогда $a>1$. Индукцией

по a при помощи формулы суммы кубов можно доказать, что $(2m)^{3^a}+1$ не делится на 3^{a+2}. Число n^2 делится на 3^{2a}. Очевидно, $2a \ge a+2$. Значит, 2^n+1 не делится на n^2 при $n > 3$.
Ответ: $n = 1$ или 3.

42. а) Пусть 2^n-1 кратно n, причем $n > 1$. Тогда n нечетно. Рассмотрим наименьший простой делитель p числа n. Порядок числа 2 по модулю p не превосходит $p-1$ и является делителем числа n. Поскольку этот порядок больше 1, мы получили противоречие.
б) Например, числа вида $n = 6k$.
в) Рассмотрите последовательность, заданную своим первым членом $n_1 = 1$ и соотношением $n_{k+1} = a^{n_k}-1$.

43. а) *Указание*. Если a четно, то $a^{a+1}+1$ делится на $a+1$. Если же a нечетно, то a^2+1 четно, но не делится на 4, так что $a^{a^2+1}+1$ делится на a^2+1. Значит, хотя бы одно n, для которого a^n+1 кратно n, существует.
б) *Ответ*: при всех a, кроме чисел 3, 7, 15, …, 2^k-1, …
Указание. Если $a+1$ делится на простое нечетное число p, то a^p+1 делится на p^2. Если же $a+1$ – степень двойки, $n > 1$ и a^n+1 делится на n^2, то, в силу упражнения 38, n четно; а при четном n число a^n+1 не делится на 4.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. На кусочке бумаги, являющейся диэлектриком, возникают поляризационные заряды. Электрическое поле вблизи расчески сильнее, чем вдали от нее, поэтому сила притяжения к расческе больше, чем сила отталкивания (рис.3). В однородном же поле плоского конденсатора на поляризованный диэлектрик действуют равные по величине и противоположно направленные силы.

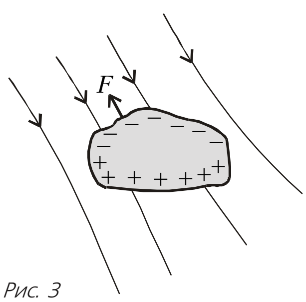

Рис. 3

2. Заряды, возникающие в диэлектрике, в отличие от свободных зарядов в проводнике, являются связанными.

3. Напряженности полей в воздухе и в диэлектрике равны друг другу. Ослабление поля внутри диэлектрика из-за его поляризации компенсируется увеличением плотности заряда на нижней части обкладок конденсатора.

4. Пленка диэлектрического окисла, образующегося на поверхности обкладки, имеет очень маленькую толщину.

5. Не изменятся.

6. Из-за поляризации диэлектрика внутри пластины изменятся направление и густота силовых линий (рис.4).

7. См. рис.5. При переходе границы диэлектрика число силовых линий изменяется скачком из-за действия поляризационных зарядов.

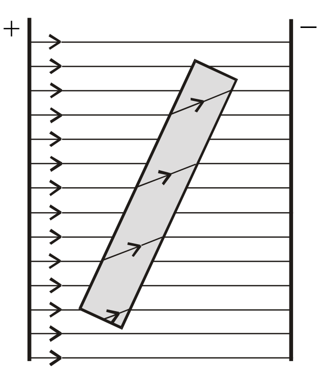
Рис. 4

8. При погружении в диэлектрик разность потенциалов, а следовательно, и напряженность электрического поля между шариками не изменятся. Это достигается увеличением зарядов шариков в ε раз, где ε – диэлектрическая проницаемость жидкости. Значит, сила притяжения между шариками возрастет в ε раз.

9. Заряд каждой обкладки увеличится в ε раз (см., например, решение предыдущей задачи), во столько же раз возрастет напряженность поля, порождаемого в воздухе каждой из обкладок. Поэтому сила притяжения между обкладками увеличится в ε^2 раз.

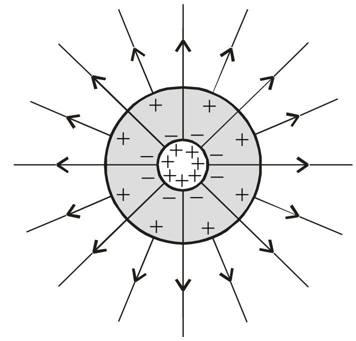
Рис. 5

10. Более высокое пробивное напряжение требует более толстого слоя диэлектрика, а это вызовет уменьшение емкости. Чтобы сохранить заданную емкость, требуется увеличить площадь обкладок. Обе причины ведут к увеличению объема конденсатора.

11. $\varepsilon = 2$.

12. Уменьшится в ε раз.

13. Дипольные моменты в диэлектрике ориентируются в электрическом поле с запаздыванием.

14. Металлы.

15. Да, так как в поле электрона ядро атома и его электронная оболочка изменяют свое взаимное положение. Электроны, отталкиваясь, смещаются против поля, а ядро, притягиваясь, смещается в направлении внешнего поля, в результате у атома появляется дипольный момент.

16. См. рис.6.

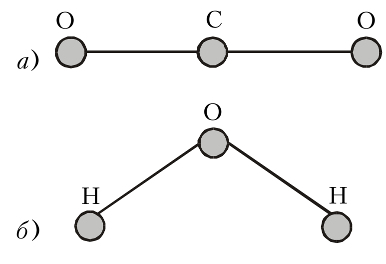

Рис. 6

Микроопыт

Электрическое поле вблизи клемм аккумулятора или полюсов батарейки слишком слабо для заметной поляризации диэлектрика.

Поляры и теорема Паппа

1. Выберем за центр полярного преобразования точку O. Обозначим поляры прямых l и m буквами B и C. Тогда полярой точки A является прямая BC.
Обозначим через N поляру прямой LM. Тогда полярами точек L и M будут прямые BN и CN соответственно.
Поскольку OL и OM – касательные к окружности, то

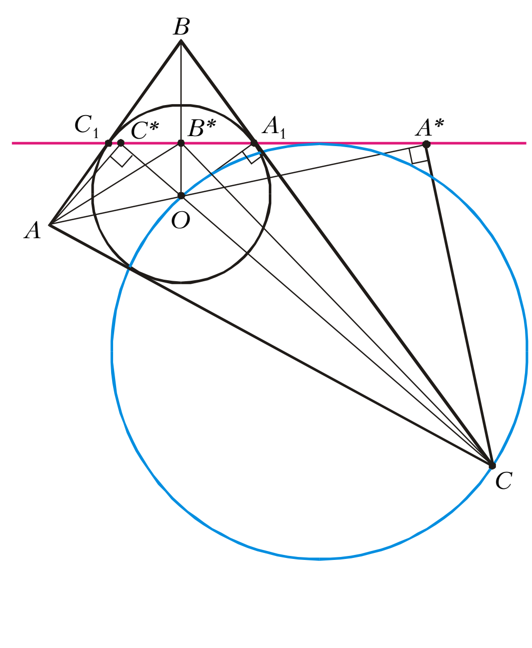

Рис. 7

$\angle LOA = \angle AOM$. Следовательно, поляры точек L и M образуют равные углы с полярой точки A (обдумайте это!). Вспомнив, что чья поляра, получаем: прямые BN и CN образуют равные углы с прямой BC. Попросту говоря, треугольник BNC равнобедренный, $BN = NC$.

Значит, точка N лежит на серединном перпендикуляре к прямой BC. Поляра к этому перпендикуляру как раз и является той точкой, через которую проходят всевозможные прямые LM.

2. Выполним полярное преобразование относительно вписанной в треугольник ABC окружности. Полярами точек A_1 и C_1 являются прямые BC и AB. Поляра прямой MN лежит на поляре точки B, т. е. на прямой A_1C_1.

Поскольку прямая MN параллельна A_1C_1, то поляры этих двух прямых и точка O лежат на одной прямой. Следовательно, поляра прямой MN – это точка B^* пересечения OB и A_1C_1 (рис.7).

Поляры точек M и N – это прямые AB^* и CB^*. Поэтому

$$\angle AB^*C = 180° - \angle MON,$$

так что задача свелась к доказательству того, что угол AB^*C тупой.

Проведем биссектрисы AO и CO до пересечения с прямой A_1C_1 в точках A^* и C^* соответственно.

Лемма. $\angle AA^*C = 90°$.

Доказательство. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle A^*OC = \angle OAC + \angle OCA$. По теореме об угле между хордой и касательной $\angle C_1A_1C = \frac{1}{2}\left(360° - \angle C_1OA_1\right)$. Следовательно,

$$\angle A^*OC + \angle C_1A_1C = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 180° - \frac{1}{2}\left(180° - \beta\right),$$

где для краткости введены обозначения α, β, γ для углов треугольника ABC. Упростив полученное выражение, находим

$$\angle A^*OC + \angle C_1A_1C = 180°.$$

Значит, четырехугольник OA_1A^*C вписанный и по теореме о вписанном угле $\angle OA^*C = \angle OA_1C = 90°$.

Лемма доказана. Аналогичным образом можно доказать равенство $\angle OC^*A = 90°$.

Теперь решение упражнения не составляет труда: как мы только что доказали, точки A^* и C^* лежат на окружности с диаметром AC. Точка B^* лежит между ними и потому находится внутри окружности с диаметром AC. Последнее как раз и означает, что угол AB^*C тупой.

Закон сохранения энергии для одноатомного идеального газа

1. $A = 2R\Delta T \approx 5$ Дж. **2.** $Q = A + 3/2\, R\Delta T$.

3. $A_{12} = 2A - 3/2\, RT_1 = 935$ Дж. **4.** $\eta_1 = 2\eta/(1+\eta)$.

Всероссийская студенческая олимпиада по физике

1. $\tau = (\pi + 2)\sqrt{R/g} \approx 69$ мин. **2.** $\omega_2 = \omega_1 R_1 \Big/ \left(\sqrt{2}R_2\right)$.

3. а) $T_1 = \sqrt{3/2}\,T_0$, $\varphi_1 = \varphi_0$, $E_1 = E_0$;

б) $T_1 = \sqrt{3/2}\,T_0$, $\varphi_1 = \sqrt{2/3}\,\varphi_0$, $E_1 = 2/3\,E_0$.

4. $T = mv_0^2 \big/ (4k)$, где k – постоянная Больцмана;

$N = 8\sqrt{2\pi}\,\pi R^3 n_0 \big/ 3$.

5. $\sigma = \varepsilon_0\left(U_1 - U_2\right)\big/ d \approx 9{,}4\cdot 10^{-7}$ Кл/м^2;

$m_1 = \varepsilon_0\left(U_1^2 - U_2^2\right)\Big/\left(2gd^2\right) \approx 9{,}3\cdot 10^{-3}$ кг/м^2.

6. $d = 50L$. **7.** $B = (r\,\mathrm{tg}\,\theta)/q$. **8.** $I = I_0\left(1 + 9\pi^2/4\right)$.

Периодические дроби

(см. «Квант» №2)

2. Длина периода равна 6. При делении на 6 число 100 дает остаток 4. Поэтому сотая после запятой цифра такая же, как четвертая. *Ответ*: 5.

4. б) *Указание.* 0,(845) + 0,(49) = 0,(845845) + 0,(494949). Поскольку сумма 845845 + 494949 = 1 340794 – семизначное число, возникают переносы «в предыдущий период».

в) Очевидно, 2,70(584) = 2,705(845). Расширив периоды до длины, равной наименьшему общему кратному периодов слагаемых, получим: 2,705(845) + 6,917(49) = 2,705(845845) + + 6,917(494949) = 9,623(340795).

5. а) 0,(23); б) 0,(001234).

6. а) $0,(012) = 12/999 = 4/333$; б) $3,1(3) = 3 + 0,1 + 0,0(3) = 3,1 + \frac{1}{10}\cdot 0,(3) = 3,1 + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{47}{15}$; в) $1,93(173) = 1,93 + \frac{1}{10}\cdot 0,(173) = 1,93 + \frac{1}{10}\cdot\frac{173}{999} = 9649/4995$.

7. *Указание*. Сумма (произведение, разность) двух обыкновенных дробей (рациональных чисел) – обыкновенная дробь.

8. *Указание*. Сначала напишите все те цифры, которые входят в запись конечное число раз. А затем – те, которых бесконечно много (составив из них период).

9. $0,(692307) = 7,(692307) - 7 = \frac{100}{13} - 7 = \frac{9}{13}$.

10. а) $\frac{12}{85} = \frac{24}{170} = \left(1 + \frac{7}{17}\right) : 10 =$

$= 0,1(4117647058823529)$;

б) $\frac{3}{68} = \frac{75}{1700} = \left(4 + \frac{7}{17}\right) : 100 =$

$= 0,04(4117647058823529)$.

11. в) *Указание*. Поскольку $k \ge 3$, то $n \ge 3\cdot 2^c$.

12. Предположим противное: пусть $n \le 100$ и дробь m/n содержит цифры 167 в своей десятичной записи. Тогда, домножив дробь на степень десятки и вычтя образовавшуюся целую часть, получим дробь, в которой цифры 167 идут сразу после запятой. Домножим такую дробь на 6. Поскольку 167 · 6 = = 1002 и 168 · 6 = 1008, получим число, которое больше 1 и меньше 1,008 < 1,01. При умножении на n получаем (целое!) число, которое больше n и меньше $n + 0,01n \le n + 1$. Но такого целого числа не существует. Противоречие.

13. $\left[\frac{100}{6}\right] = 16$.

14. Число $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ кратно 7 тогда и только тогда, когда n кратно 6. Число 111111 кратно и 11, и 13, и 15873 (=111111/7).

15. При k, кратных 6.

16. *Указание*. Подумайте, что происходит при делении «уголком». *Ответ*: $n = 2$, а m – четное число.

17. а) По условию, $10^n - 1$ не кратно числу p, а $10^{2n} - 1 = \left(10^n - 1\right)\left(10^n + 1\right)$ кратно p. Следовательно, $10^n + 1$ кратно p. Пусть $1/p = \left(10^n a + b\right)\Big/\left(10^{2n} - 1\right)$, где $0 \le a,\ b < 10^n$. Тогда $\left(10^n a + b\right)\Big/\left(10^n - 1\right) = \left(10^n + 1\right)\Big/ p$ – целое число. Поскольку

$10^n a + b = (10^n - 1)a + (a + b)$ кратно числу $10^n - 1$, то сумма $a + b$ тоже кратна числу $10^n - 1$. Заметив, что $0 < a + b < 2(10^n - 1)$, заключаем: $a + b = 10^n - 1$.

18. а) 15.

19. а) Поскольку $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$, число $A = \underbrace{11...1}_{1986}$ имеет кроме числа 1 и самого A еще шесть делителей из одних единиц: 11, 111, 111111, $\underbrace{11...1}_{31}$, $\underbrace{11...1}_{662}$ и $\underbrace{11...1}_{993}$.

б) Поскольку $111111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и поскольку $10^{993} + 1$ кратно числу $10^3 + 1 = 1001$, а $10^{993} - 1$ кратно $10^3 - 1 = 999$, то, обозначив $a = 10^{331}$, получаем:

$$A = (a^6 - 1)/9 = (a^3 + 1)(a^3 - 1)/9 =$$

$$= 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \frac{a^3 + 1}{1001} \cdot \frac{a^3 - 1}{999}.$$

Произведение любого набора из этих семи множителей является делителем числа A («пустому набору» соответствует 1). Таким образом, мы нашли $2^7 = 128$ делителей. Все они различны, поскольку семь выписанных множителей попарно взаимно просты. (В самом деле, остаток от деления a на $m = 10^6 - 1$ равен 10, поскольку $10^{331} - 10 = 10(10^{6 \cdot 55} - 1)$ кратно m; поэтому $a^3 \pm 1$ при делении на m дает остаток $10^3 \pm 1$, так что числа $(a^3 + 1)/1001$ и $(a^3 - 1)/999$ взаимно просты с m и, очевидно, взаимно просты друг с другом.)

в) Продолжим разложение:

$$A = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \frac{a+1}{11} \cdot \frac{a^2 - a + 1}{91} \cdot \frac{a-1}{9} \cdot \frac{a^2 + a + 1}{111}.$$

Отсюда видно, что A имеет не менее $2^9 = 512$ делителей. В силу малой теоремы Ферма число $9A = 10^{1986} - 1$ кратно простому числу 1987. Таким образом, один из четырех последних сомножителей разложения кратен 1987, а значит, A имеет не менее $2^{10} = 1024$ делителей.

20. а) 6; б) 6.

21. а) 4 или 12; б) 15, 30 или 60.

22. а) Обозначим ПЛОМБ = x. Тогда $(10x + А) \cdot 5 = 100000 \cdot А + x$, откуда $49x = 99995$А.

Ответ: ПЛОМБА = 142857.

б) 714285. в) $6000x + 6y = 1000y + x$, $5999x = 994y$, $859x = 142y$, откуда $x = 142$ и $y = 859$.

г) Да, таково число 142857.

д) 102564, 128205, 142857, 153846, 179487, 205128 и 230769.

23. *Указание*. Если $10000a + b$ кратно 41, то $10(10000a + b) = 99999a + a + 10b = 41 \cdot 2439a + (10b + a)$ тоже кратно 41.

24. 105263157894736842.

25. *Указание*. Записав числители в системе счисления с основанием a и «прокрутив» их, разбейте дроби на циклы по n дробей в каждом.

26. *Указание*. Это – переформулировка того факта, что $L(3^{n+2}) = 3^n$.

27. а) 81; б) 9^9; в) $2 \cdot 11^{10}$; г) $2 \cdot 3^k \cdot 7^{l-1}$.

28. На 2^6.

31. При делении «уголком» 1 на 3^{100} получаем периодическую десятичную дробь с периодом длины $M = 3^{98}$. Поэтому в процессе деления встретятся M различных остатков. Первый из остатков равен 1, а каждый следующий получается из предыдущего умножением на $10(= 9 + 1)$ и вычитанием числа, кратного 3^{100}. Эти процедуры не меняют остаток от деления на 9. Поэтому появляющиеся в процессе деления остатки имеют вид $9q + 1$, где $0 \le q < M$. Поскольку чисел такого вида ровно M штук, все они встретятся в качестве остатков. Остальное просто. Пусть $a = 0,a_1a_1...a_{46}$ – десятичная дробь, $b = a + 10^{-46}$. Поскольку $3^{100} > 10^{47}$, разность чисел $3^{100}b$ и $3^{100}a$ больше 10. Следовательно, между ними найдется число вида $9q + 1$. В процессе деления, начиная с остатка $9q + 1$, будут получены все 46 цифр $a_1a_1...a_{46}$: ведь $a < (9q + 1)/3^{100} < b$.

32. Известны два таких простых числа 487 и 56598313.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://www.accessnet.ru/vivovoco

(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, М.А.Сумнина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени ГУП Чеховский полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций 142300, г.Чехов Московской области, Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536
Заказ №