

вый и во второй раз, если объем бака 64 л?

7 (10, 11 кл.). Угол наклона ленты подъемника к горизонту 5° . Коэффициент трения между грузом и лентой 0,2. При каком максимальном ускорении ленты поднимаемый ящик не будет скользить по ленте подъемника? Лента подъемника не прогибается, ускорение свободного падения 10 м/с^2 .

8 (10, 11 кл.). При каких значениях параметра a квадратное уравнение

$$4x^2 - 2x + a = 0$$

имеет два различных корня?

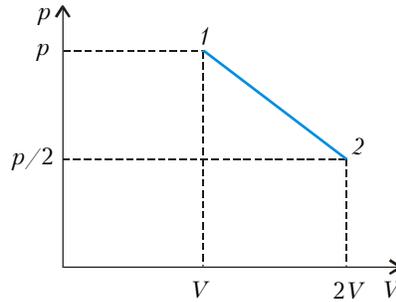


Рис. 2

9 (11 кл.). На рисунке 2 изображен график процесса расширения идеального газа, при котором он переходит из состояния 1 с давлением p и объемом V в состояние 2 с давлением $p/2$ и объемом $2V$. Найдите количество теплоты, которое сообщили этому газу. Линия 1–2 – отрезок прямой.

10 (11 кл.). Решите уравнение

$$4 \cos x + \sin x = 4.$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Очевидно, что $A = 0$, $L = 1$. Далее, перебирая различные M (2, 3, ..., 9), приходим к выводу, что имеет место единственный случай $M = 6$. A значит, зашифрованная запись имеет вид

$$\begin{array}{r} 70660 \\ + 35760 \\ \hline 106420 \end{array}$$

2. Исходное число делится на 23 (в этом можно убедиться, например, разделив $255...53$ на 23 «уголком»).

3. Пусть Валера собрал x мешков. Тогда, согласно условию, Саша собрал в 5 раз больше, т.е. $5x$ мешков. Андрей же собрал на 10 мешков меньше Саши, т.е. $(5x - 10)$ мешков. Опять же по условию, Саша собрал больше половины всех мешков, т.е. больше, чем Валера вместе с Андреем. Поэтому

$$5x > x + (5x - 10),$$

откуда $x < 10$.

Всего «Егорушки» собрали $x + 5x + (5x - 10) = 11x - 10$ мешков. Так как Валере удалось поделить эти мешки поровну между всеми тремя членами группы, то $(11x - 10)$ делится на 3. Среди всех целых неотрицательных x , меньших 10, этому требованию удовлетворяют лишь $x = 2, 5$ и 8. Какое же из них верное?

Вспомним малозаметную, но немаловажную часть условия: Валера с целью уравнивать число мешков отобрал несколько мешков y каждого из приятелей, т.е. и y Саши, и у Андрея. Отсюда следует, что и Саша, и Андрей собрали *более чем по трети* всех мешков (иначе им пришлось бы, наоборот, добавить мешков). С Сашей все это и без того очевидно (он, как мы знаем, собрал больше всех, т.е. заведомо больше трети всех мешков). Что же касается Андрея, то данное требование может привести к дополнительным ограничениям. Итак, всего было собрано $(11x - 10)$ мешков, и третья их часть, т.е. $(11x - 10)/3$ мешков, должна быть меньше, чем собрал Андрей, т.е. $(5x - 10)$. Получаем еще одно неравенство:

$$(11x - 10)/3 < (5x - 10),$$

откуда $x > 5$. Этому неравенству удовлетворяет лишь одна из трех найденных выше кандидатур, а именно $x = 8$.

Остальное не представляет затруднений. Итак, Валера собрал $x = 8$ мешков, Саша – $5x = 40$ мешков, а Андрей – $5x - 10 = 30$ мешков. Всего же «Егорушки» собрали $8 + 40 +$

$+ 30 = 78$ мешков пуха. На клип должно хватить!

3. Закрасим клетки поля в шахматном порядке двумя цветами. В силу того что клеток поля нечетное количество, клеток одного цвета будет на 1 больше, чем клеток другого цвета. Каж-

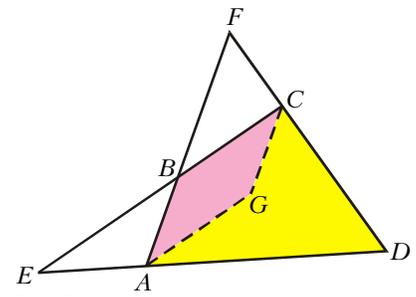


Рис. 1

дый же танцор в хороводе должен иметь возможность переместиться на клетку своего соседа, сменив цвет клетки, на которой он пребывает. Но это сделать невозможно.

5. Даша права. Если четырехугольник является трапецией, то очевидно, что параллелограмм вырезать можно. Если четырехугольник $ABCD$ не имеет параллельных сторон, то продолжим противоположные стороны AB, CD и AD, BC до пересечения: получим точки F и E (рис.1). Концы сторон, за которыми пересеклись прямые – в нашем случае это A, B, C , – и будут вершинами исходного параллелограмма. Действительно, луч AG , параллельный BC , будет находиться внутри угла CED ; луч CG , параллельный AB , – внутри угла AFD . Т.е. точка пересечения лучей G будет находиться в пересечении этих углов, а значит, в четырехугольнике $ABCD$.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 1999 г.)

11. Поскольку значения $x = 0, y = 0, y = -1$ и $y = 1$ не входят

в область допустимых значений выражения $\frac{x - \frac{1}{x}}{y - \frac{1}{y}}$, то примем в дальнейшем, что $xy \neq 0, |y| \neq 1$, и запишем исходное

$$\text{тождество в виде } k = \frac{(x^2 - 1)y}{(y^2 - 1)x}.$$

В случае $|x| = 1$ получаем одно из возможных решений: $k = 0$. Рассмотрим случай $|x| \neq 1$. Числа $y^2 - 1$ и $|y|$, как и числа $x^2 - 1$ и $|x|$, взаимно просты. Отсюда $x^2 - 1 = a(y^2 - 1), y = bx$, где числа a и b целые, причем $a \geq 1, |b| \geq 1$. Из неравенства $a \geq 1$ следует $|x| \geq |y|$, а из неравенства $|b| \geq 1$ – неравенство $|y| \geq |x|$, поэтому $|x| = |y|$. Следовательно, $k = -1$