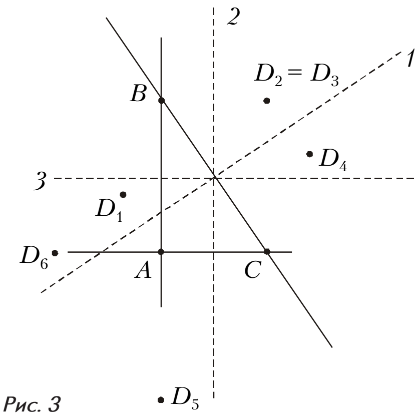

Рис. 3

требует и задача **2.2**: ось симметрии – либо одна из прямых AB, AC и BC, либо серединный перпендикуляр к одной из сторон треугольника ABC. Поэтому если треугольник ABC непрямоугольный, то возможно шесть вариантов расположения точки D (рис.2), а если прямоугольный, то только пять вариантов (рис.3).

По-настоящему элегантна задача **2.3**. Хотя ее никто не решил, всем очень понравилось, что

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)>a^2+b^2.$$

Увеличиваясь, сумма квадратов никогда не вернется к своему первоначальному значению!

Третий тур

(15 минут; каждая задача – 7 баллов)

3.1. К параболам, заданным уравнениями $y = x^2 + 4$ и $y = 2x - x^2$, проведены две общие касательные. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках касания – параллелограмм.

3.2. Стороны a, b, c треугольника удовлетворяют неравенствам $a \le 2 \le \le b \le 3 \le c \le 4$. Найдите наибольшее возможное значение площади этого треугольника.

3.3. Первые 1511 натуральных чисел расставлены по порядку вдоль окружности. Затем последовательно вычеркнули каждое второе число, т.е. 2, 4, …, 1510, 1, 5, 9, …, и так до тех пор, пока не осталось только одно число. Какое число осталось?

Задача **3.1** не требовала нахождения координат точек касания (хотя найти их не так уж сложно). Суть в том, что уравнения парабол имеют равные по модулю и противоположные по знаку коэффициенты при x^2, поэтому параболы симметричны относительно некоторой точки. Эта точка – центр симметрии четырехугольника с вершинами в точках касания – является серединой отрезка, соединяющего вершину параболы $y = x^2 + 4$ – точку (0; 4) – с вершиной параболы $y = -x^2 + 2x$ – точкой (1; 1). Середину найти легко:

$$\left(\frac{0+1}{2};\frac{4+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right).$$

Задача **3.2** тоже легкая: площадь треугольника не может быть больше половины произведения его сторон (объяснять это можно по-разному, например можно сослаться на формулу $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma\le\frac{1}{2}ab$, поскольку синус никогда не бывает больше 1). Следовательно,

$$S\le\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3.$$

Наибольшего значения площадь достигает в случае, когда рассматриваемый треугольник прямоугольный с катетами 2 и 3. Тогда гипотенуза равна $\sqrt{4+9}<4$. Итак, треугольник со сторонами 2, 3 и $\sqrt{13}$ удовлетворяет неравенствам задачи; наибольшее возможное значение площади равно 3.

Задачу **3.3** никто не решил. А она весьма любопытна: в книге Р.Грэхема, Д.Кнута и О.Паташника «Конкретная математика» ей посвящен целый параграф и присвоено имя древнего историка Иосифа Флавия, участвовавшего в практическом решении похожей задачи.

Давайте рассмотрим общий случай. Пусть первоначально вдоль окружности расположено n чисел. Искомое число обозначим через $f(n)$. Тогда

$$f(2n)=2f(n)-1$$

и

$$f(2n+1)=2f(n)+1.$$

(На рисунках 4 и 5 эти формулы проиллюстрированы при $n = 6$.) Применяя эти рекуррентные соотношения, последовательно получаем: $f(1511) = 2f(755) + 1$; $f(755) = 2f(377) + 1$; $f(377) = 2f(188) + 1$; $f(188) = 2f(94) - 1$; $f(94) = 2f(47) - 1$; $f(47) = 2f(23) + 1$; $f(23) = 2f(11) + 1$; $f(11) = 2f(5) + 1$; $f(5) = 2f(2) + 1$; $f(2) = 2f(1) - 1$.

Очевидно, $f(1) = 1$. Теперь легко находим: $f(2) = 1$; $f(5) = 2\cdot 1 + 1 = 3$; $f(11) = 2\cdot 3 + 1 = 5$; …; $f(1511) = 975$. Мы получили ответ!

В общем случае, если $n = 2^k + m$, где $m < 2^k$, то останется число

$$f(n) = 2m + 1.$$

(Например, $1511 = 1024 + 487 = 2^{10} + 487$, и в нашем случае останется число $2\cdot 487 + 1 = 975$. Все правильно!) Ключевой момент доказательства состоит в том, что $f\left(2^k\right) = 1$, а это непосредственно вытекает из соотношения $f(2n) = 2f(n) - 1$. В общем случае, когда $n = 2^k + m$, количество чисел сокращается до степени двойки после m вычеркиваний. Очередным числом в этот момент является $2m + 1$, оно и уцелеет!

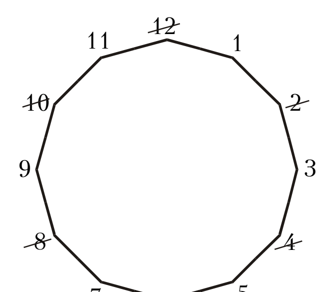

Рис. 4

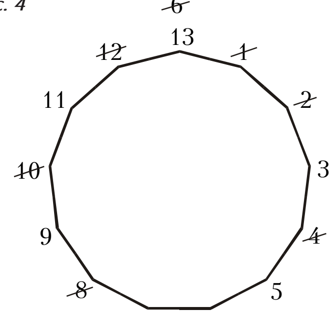

Рис. 5

Четвертый тур

(20 минут; каждая задача – 8 баллов)

4.1. Докажите, что ни при каких действительных a, b и c числа $(a-b)\left(ab-c^2\right)$, $(b-c)\left(bc-a^2\right)$, $(c-a)(ac-b^2)$ не могут быть одновременно положительными.

4.2. Длины некоторых шести сторон вписанного в окружность двенадцатиугольника равны $\sqrt{2}$, а длины каждой из шести других его сторон равны $\sqrt{24}$. Найдите радиус окружности.

4.3. Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться значение выражения $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, где n – натуральное число?

В задаче **4.1** можно разбирать случаи (рискуя не успеть!), а можно заметить, что сумма рассматриваемых чисел $(a^2b - ab^2 - ac^2 + bc^2) + (b^2c - bc^2 - a^2b + a^2c) + (ac^2 - a^2c - b^2c + ab^2)$ равна нулю, а сумма положительных чисел нулю равняться не может.

В задаче **4.2** независимо от способа чередования сторон многоугольника найдутся две стороны разной длины, имеющие общую вершину, например AB и BC (рис.6).

Соединим центр окружности с вершинами двенадцатиугольника. Возникнут два типа равнобедренных треугольников: бо-

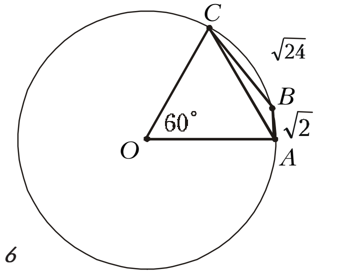

Рис. 6