Математическая регата

Регата – это командное соревнование по решению задач. Не привычная олимпиада и даже не математический бой, а что-то вроде шахматного блица. Каждая команда состоит из четырех человек, которые делают одну общую работу. В каждом из пяти туров команда сдает по три листочка – по одному на каждую задачу.

Для регат пригодны только те задачи, решение которых может быть изложено сравнительно кратко; времени на обдумывание очень мало! Из-за цейтнота возникает спортивный азарт, который захватывает всех – и тех, у кого мало что получается, и тех, кто борется за первые места (результаты каждого очередного тура жюри объявляет перед следующим туром, так что все время все видят, как идет борьба). Полезен ли этот азарт? Конечно, да. Особенно замечательно, что борьба идет не между участниками, а между командами; во время регаты все думают только о командном результате, учатся взаимодействовать, помогать друг другу.

В регате есть не только развлекательно-спортивная, но и учебная сторона. После каждого тура, когда уже собраны листочки и жюри занялось проверкой, ведущий рассказывает решения задач этого тура. Участники слушают рассказ решений с огромным интересом, поскольку несколько минут назад сами решали эти задачи. И воспринимают это не как работу, а скорее как отдых перед очередным туром!

А теперь – устройте себе регату. Перед вами задания, предлагавшиеся в прошлом году десятиклассникам нескольких московских школ.

Заготовьте пятнадцать листочков, прочитайте условия первого тура и заметьте по часам время (в зависимости от возраста и подготовки можете увеличить время, но не более чем в четыре раза!). Скорее всего, задач, которые удастся решить и аккуратно оформить, окажется неожиданно мало, особенно после того, как вы сверите свои решения с нашими. Потом прочитайте задачи второго тура, и так дальше – до пятого тура.

Первый тур

(10 минут; каждая задача – 6 баллов)

1.1. В зависимости от значений параметра b определите количество корней уравнения $\sqrt{3x-5} = b - \sqrt{3x+11}$.

1.2. Окружность, построенная на основании AB трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается основания CD. Найдите величины углов этой трапеции.

1.3. Решите неравенство

$$x^2 - (\sin 4 + \sin 5)x + \sin 4 \sin 5 < 0.$$

В задаче **1.1** можно записать условие в виде

$$b = \sqrt{3x-5} + \sqrt{3x+11}$$

и заметить, что функция в правой части непрерывна и возрастает, стремясь к бесконечности, на всей своей области определения – луче $[5/3; +\infty)$. Значит, при $b \ge \sqrt{3\cdot\frac{5}{3}+11} = 4$ уравнение имеет одно решение, а при $b < 4$ решений нет.

Для тех, кому эта задача кажется слишком простой, заметим, что на Санкт-Петербургской олимпиаде 1999 года одиннадцатиклассники искали наибольшее значение функции

$$\sqrt[4]{1-a} + \sqrt[4]{a+1} - \sqrt[4]{a},$$

которую можно представить в виде суммы двух функций: $\sqrt[4]{1-a}$ и $\sqrt[4]{1+a} - \sqrt[4]{a}$. Убывание первой из них очевидно, а убывание второй следует из тождества

$$\sqrt[4]{1+a} - \sqrt[4]{a} = \frac{1}{\sqrt[4]{(1+a)^3} + \sqrt[4]{a(1+a)^2} + \sqrt[4]{a^2(1+a)} + \sqrt[4]{a^3}}.$$

Так что не только на регате, но и на вполне уважаемых олимпиадах встречаются задачи о том, что сумма двух убывающих функций убывает!

Задача **1.2** не была решена ни одной командой. Между тем величина угла AOM (рис.1) равна 30°, ибо именно такова величина угла в прямоугольном треугольнике, катет MN которого вдвое меньше гипотенузы MO. Далее, зная $\angle AOM = 30°$, легко найти величину угла MAO равнобедренного треугольника MAO по формуле

$$(180° - 30°)/2 = 75°.$$

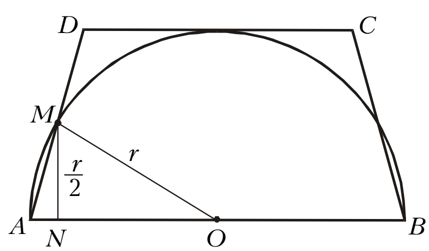

Рис. 1

В чем же причина такой недодумчивости десятиклассников? Уже несколько лет подряд экзамен по геометрии в конце девятого класса в школах Москвы не проводился. А когда в 1999 году его решили-таки провести, то во многих школах экзаменовали по так называемым открытым билетам, т.е. задолго до экзамена сообщили условия экзаменационных задач.

В задаче **1.3** практически все смогли разложить многочлен на множители:

$$(x - \sin 4)(x - \sin 5) < 0,$$

но многие не заметили, что $\sin 4 > \sin 5$, и поэтому записали ответ в виде $(\sin 4; \sin 5)$ вместо правильного $(\sin 5; \sin 4)$.

Второй тур

(15 минут; каждая задача – 7 баллов)

2.1. При какой комбинации знаков верно равенство

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \pm \sqrt{1-\sin\alpha},$$

где $\alpha = 19\pi/11$?

2.2. Точки A, B и C являются вершинами неравнобедренного треугольника. Сколько существует таких точек D, что множество точек $\{A, B, C, D\}$ имеет хотя бы одну ось симметрии?

2.3. Дано несколько ненулевых чисел. Вместо любых двух чисел a и b можно записать числа $a + \frac{b}{2}$ и $b - \frac{a}{2}$. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя вновь получить исходный набор чисел.

Задача **2.1** не очень интересна, поэтому ограничимся ответом:

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Кроме внимания, ничего особенного не

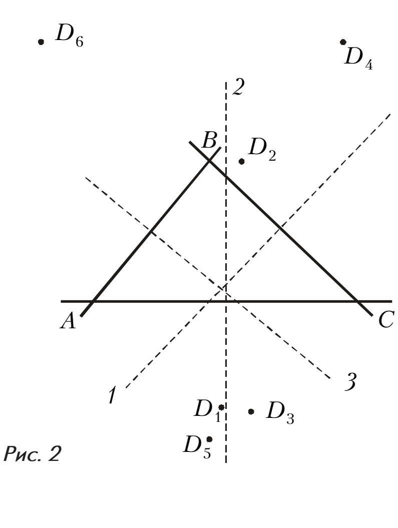

Рис. 2