

Теперь положим $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$. Получим

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $abc = 1$.

Эта задача предлагалась в 1995 году на Международной математической олимпиаде (см. задачу M1526).

С.Калинин, В.Сендеров

Ф1718. Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью 5 м/с. В некоторый момент его замечает лиса и начинает погоню. Скорость лисы постоянна по величине и равна 4 м/с, а движется она тоже не самым лучшим образом – скорость ее в каждый момент направлена точно в ту точку, где находится заяц. Вначале расстояние между ними уменьшается, затем начинает возрастать. Минимальное расстояние составляет 30 м. Какое ускорение было у лисы в тот момент, когда расстояние стало минимальным?

В неподвижной системе отсчета скорость лисы по модулю постоянна; значит, ускорение лисы связано с поворотом вектора ее скорости. Пусть в некоторый момент скорость лисы составляет угол α с направлением скорости зайца, тогда скорость сближения лисы и зайца равна

$$v_{\text{отн}} = v_l - v_z \cos \alpha.$$

Минимальное расстояние между участниками забега получается в тот момент, когда относительная скорость становится нулевой; значение угла при этом определяется соотношением

$$\cos \alpha_0 = \frac{v_l}{v_z} = 0,8.$$

Теперь мы можем задать очень малый интервал времени τ , найти малый угол поворота вектора скорости лисы:

$$\varphi = \frac{\tau v_z \sin \alpha}{L}$$

и ускорение лисы:

$$a = \frac{v_l \varphi}{\tau} = \frac{v_l v_z \sin \alpha}{L} = 0,4 \text{ м/с}^2.$$

Можно решать задачу и в системе отсчета, которая связана с зайцем, – но при этом придется учитывать и изменение модуля скорости лисы!

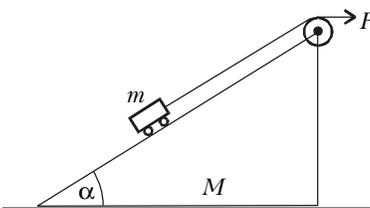
М.Учителев

Ф1719. В системе, показанной на рисунке, силы трения отсутствуют. При каком значении силы F клин и тележка могут двигаться вместе, без проскальзывания? Угол при основании клина α .

Клин и тележка могут двигаться вместе (без проскальзывания) только в том случае, когда их ускорения одинаковы, т.е. направлены горизонтально и равны

$$a = \frac{F}{M + m}.$$

Теперь можно записать уравнения движения тележки по горизонта-



ли и вертикали:

$$F \cos \alpha - N \sin \alpha = ma = \frac{mF}{M + m},$$

$$F \sin \alpha + N \cos \alpha - mg = 0.$$

Отсюда легко найти выражение для необходимой силы:

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{1 - \frac{m \cos \alpha}{M + m}}.$$

А.Клинов

Ф1720. Кусок мела лежит на горизонтальной доске с коэффициентом трения μ . Доску резко начинают двигать в горизонтальном направлении со скоростью v_0 , а через время τ резко останавливают. Найдите длину меловой черты на доске.

Если за время τ кусок мела успеет набрать скорость, которую придают доске, то он переместится по доске на

$$L_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Если теперь доску резко остановить, кусок мела проедет столько же в обратную сторону, остановится в начальной точке, и длина меловой черты будет равна L_1 .

Если же отрезок времени τ мал и мел не успеет остановиться относительно доски, то решение выглядит по-другому. Длина меловой черты до момента остановки доски равна

$$L_2 = v_0 \tau - \frac{\mu g \tau^2}{2}.$$

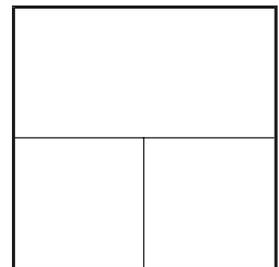
К моменту остановки доски мел приобретет скорость (относительно неподвижной системы отсчета) $v = \mu g \tau$. После остановки доски скорость куска мела начнет убывать – до полной остановки, а длина пройденного при этом пути составит

$$L_3 = 0,5v \cdot \frac{v}{\mu g} = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Легко видеть, что эта величина меньше L_2 , следовательно, длина меловой черты в этом случае равна L_2 .

К.Чертов

Ф1721. В высокий вертикальный сосуд квадратного сечения, разделенный вертикальными перегородками на три части (см. рисунок), налили до одной и той же высоты горячий суп с температурой $+65^\circ\text{C}$ – в большое отделение, теплый компот при $+35^\circ\text{C}$ и холодный квас при $+20^\circ\text{C}$. Наружные стенки сосуда очень хорошо теплоизолированы, внутренние перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, не очень хорошо проводящего тепло. Через некоторое время суп остыл на 1 градус. Считая, что все эти жидкости – практически одна вода, определите, на сколько изменились за это время температуры остальных двух жидкостей. Кваса в сосуде столько же, сколько компота, супа – вдвое больше.



При расчетах мы будем пренебрегать теплоемкостью самого сосуда – это разумно, если стенки его тонкие и