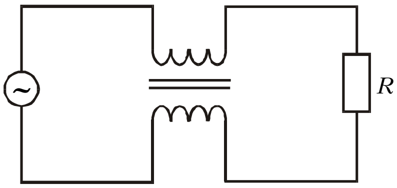

Рис.4

сети. Сопротивлением проводов и обмоток трансформатора пренебречь, рассеяние магнитного потока считать малым.

А.Зильберман

Решения задач М1706—М1710, Ф1718–Ф1727

М1706. *Пусть AL и BM – биссектрисы треугольника ABC. Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ACL и BCM лежит на отрезке AB. Докажите, что $\angle ACB = 60°$.*

Пусть K – точка пересечения окружностей на стороне AB, $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$, $\angle ABM = \angle MBC = \beta$. Тогда $\angle MCK = \angle MBK = \beta$, $\angle LCK = \angle LAK = \alpha$, как опирающиеся на равные дуги. Как видим, $\angle ACB = \alpha + \beta$, а сумма углов треугольника ABC равна $3(\alpha+\beta)$. Значит, $\angle ACB = 60°$.

Е.Сопкина

М1707*. *Квадрат клетчатой бумаги, состоящий из $n \times n$ клеток, разрезан на $2n$ прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже, либо выше ступенчатой ломаной, разделяющей квадрат (рис.1). Докажите, что найдется клетка клетчатой бумаги, являющаяся одним из названных прямоугольников.*

Ступенчатая ломанная разрезает квадрат на два ступенчатых треугольника T_1 и T_2, при этом основание T_1 состоит из n клеток, а основание T_2 – из $n-1$ клетки. В силу условия задачи, один из них разрезан на m, а другой – на k прямоугольников, причем $m + k = 2n$.

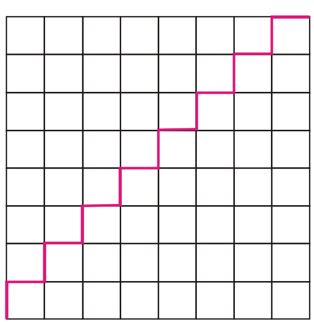

Рис.1

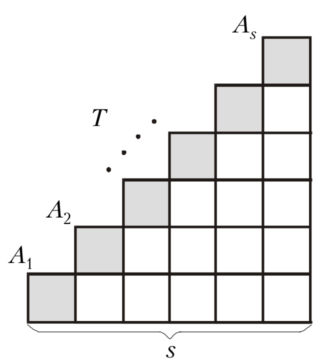

Рис.2

Пока что фиксируем внимание на отдельно взятом ступенчатом треугольнике T, в основании которого s клеток (рис.2). Так как при разрезании T на прямоугольники любые две точки из набора A_1, A_2, …, A_s должны принадлежать разным прямоугольникам, можно заключить, что T нельзя разрезать на менее чем s прямоугольников.

Разберем далее тот случай, когда T разрезан в точности на s прямоугольников; тогда каждая из точек A_1, A_2, …, A_s принадлежит только одному из них и, более того, каждая из s закрашенных клеток принадлежит целиком только одному из s прямоугольников. Незакрашенных клеток, примыкающих по сторонам к закрашенным, на единицу меньше, чем закрашенных, поэтому хотя бы один из s прямоугольников не выйдет за пределы своей заштрихованной клетки, т.е. будет с ней совпадать.

Возвращаясь к ступенчатым треугольникам T_1 и T_2, можно сказать, что $m \ge n$, а $k \ge n-1$. Но так как $m + k = 2n$, то либо $m = n$, либо $k = n - 1$. Значит, либо в T_1, либо в T_2 найдется прямоугольник, совпадающий с клеткой клетчатой бумаги.

В.Произволов

М1708. *Играют двое. Они по очереди пишут на доске делители числа 100!, отличные от 1 (без повторений). Проигрывает тот игрок, после хода которого числа на доске окажутся в совокупности взаимно просты. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник?*

Ответ: выигрывает второй игрок.

Предположим, что кто-то не может сделать ход. Поскольку перед последним ходом все числа на доске имели общий делитель, больший единицы, то они имели общий простой делитель p. Так как следующий ход сделать невозможно, на доску должны быть уже выписаны все делители 100!, делящиеся на p. Очевидно, количество таких делителей равно количеству делителей числа $100!/p$. Как известно, количество делителей натурального числа нечетно тогда и только тогда, когда это число является точным квадратом. Следовательно, если число не представляется в виде pm^2, где p – простое число, то количество его делителей, делящихся на любой простой делитель p, четно, т.е. выигрывает второй.

Осталось заметить, что число 100! делится на простые числа 97 и 89, но не делится на их квадраты, поэтому число 100! не представляется в виде pm^2, где p – простое число.

Д.Карпов

М1709. *Окружность пересекает стороны прямоугольника в восьми точках, которые последовательно занумерованы. Докажите, что площадь четырехугольника с вершинами в точках с нечетными номерами равна площади четырехугольника с вершинами в точках с четными номерами (рис.1).*

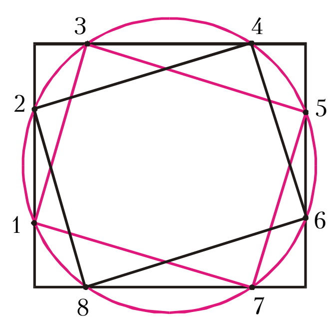

Рис.1

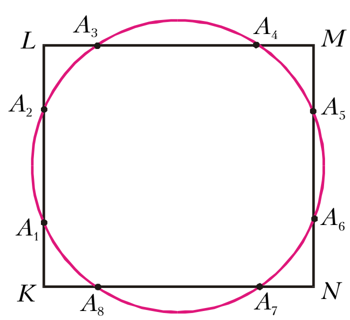

Рис.2

Сначала запишем вспомогательное равенство для отрезков горизонтальных сторон прямоугольника $KLMN$, выступающих за пределы окружности (рис.2):

$$LA_3 + NA_7 = MA_4 + KA_8.$$

Это равенство следует хотя бы из того, что трапеция $A_8A_3A_4A_7$ – равнобочная. Аналогично получаем другое вспомогательное равенство для отрезков вертикальных сторон: $KA_1 + MA_5 = LA_2 + NA_6$. Третье вспомогательное равенство получим, если приравняем произведения ле-