О запутанных веревках и топологии полимерных цепей

С.НЕЧАЕВ

Как очистить апельсин, не снимая с него кожу? Можно ли приготовить омлет из неразбитых яиц? Удастся ли гладко (без макушек) причесать волосатый бильярдный шар или тор (бублик), на котором вдруг выросли волосы? Почему нельзя завязать узел на телеграфном проводе, тянущемся вдоль линии железной дороги? Эти и подобные, часто занимательные, а иногда кажущиеся наивными, вопросы имеют непосредственное отношение к топологии. Нас же будет интересовать довольно узкий круг проблем, связанных с так называемой низкоразмерной топологией, т.е. с топологией систем, содержащих длинные перепутанные линейные нити совершенно различной физической природы. В качестве таких объектов могут выступать полимерные цепи, вихревые линии в жидком гелии и сверхпроводниках, струны в квантовой теории поля и т.п.

Одной из классических проблем низкоразмерной топологии является проблема классификации узлов и зацеплений, а также задача построения топологических инвариантов узлов, т.е. таких характеристик линейных объектов (нитей), которые не зависят от формы нити, на которой этот узел завязан, и не меняются при непрерывных деформациях. Вообще, о настоящих узлах или зацеплениях можно говорить только в том случае, если концы нити отсутствуют – либо нить замкнута, либо концы уведены на бесконечность. Действительно, при наличии свободных концов мы всегда можем с помощью непрерывной деформации нити совместить любые две произвольные конфигурации друг с другом. Поэтому для незамкнутых нитей правильнее было бы говорить о квазиузлах, представляющих собой узлы, завязанные на замкнутой кривой, составленной из самой нити и, скажем, отрезка, соединяющего концы нити. Однако в случае, когда узел имеет размер, существенно меньший, чем длина нити, разница между узлами и квазиузлами незначительна.

История донесла до нас имя одного из первых топологов-экспериментаторов Гордия, узел которого, по преданию, Александр Македонский, будучи не в силах развязать, просто разрубил. Как это ни удивительно, современная алгебраическая топология отчасти позаимствовала идею Александра Македонского для построения топологических инвариантов узлов. (В качестве введения в эту проблему полезно прочитать статью [1].) Впрочем, знание топологических инвариантов и умение классифицировать узлы и зацепления, увы, не помогает нам развязывать туго затянутые узлы на шнурках ботинок. Расплетая перепутавшиеся веревки, мы даже не удивляемся тому, что длинные нити, предоставленные самим себе, имеют особенность запутываться наиболее неприятным образом из всех возможных. Мы только горько вздыхаем, когда уже почти распутанный моток пряжи случайно падает на пол и попадает в лапы любопытному котенку, потому что прекрасно понимаем, что наш труд пошел насмарку и нужно заново начинать кропотливую работу.

Как правило, мы не задумываемся об истинных причинах такой «несправедливости», считая, что это одно из проявлений общего жизненного закона: неприятные вещи происходят чаще, чем приятные, и бутерброд обычно падает маслом вниз. И мы совершенно не отдаем себе отчета в том, что самопроизвольное запутывание длинных нитей управляется законами теории вероятностей и является следствием неевклидовой геометрии *фазового пространства узлов*, т.е. такого гипотетического пространства, которое содержит все возможные узлы и в котором есть понятие *метрики*, или расстояния между соседними по сложности узлами: чем более различаются по топологическому типу узлы, тем больше между ними расстояние в этом пространстве. В топологии такое пространство называют *универсальной накрывающей*. В общем случае построение этого пространства и описание его свойств является исключительно сложной задачей. Тем не менее, для некоторых специальных случаев, к которым мы и перейдем чуть позже, это пространство может быть описано в наглядных геометрических терминах.

Итак, выясняется, что, для того чтобы строго по-научному распутать клубок веревок, необходимо сначала изучить теорию вероятностей, а затем еще и разобраться в том, что такое неевклидова геометрия Лобачевского – Римана.

Прежде чем двигаться дальше, отвлечемся ненадолго и обсудим некоторые физические системы, в которых топологические взаимодействия играют существенную роль. В самом начале уже упоминались полимеры – длинные цепи, состоящие из десятков и сотен тысяч последовательно соединенных элементарных блоков – *мономеров*. Объединение мономеров в цепные молекулы принципиальным образом меняет все статистические и динамические свойства рассматриваемых систем, в результате чего полимерные молекулы под влиянием случайных сил, действующих со стороны среды, могут флуктуировать, принимая весьма причудливые конфигурации в про-