Великие математики прошлого и их великие теоремы

В.ТИХОМИРОВ

Эта статья посвящена истории математики. Из творчества величайших среди великих – Архимеда, Ферма, Эйлера, Лагранжа и Гаусса – я отобрал или те из их высших достижений, которыми они больше всего гордились сами, или же те, благодаря которым они более всего прославились в научном мире. Фундаментальные теоремы, о которых пойдет речь, не только важными сами по себе, но изумительно красивы. И пусть каждый из вас, мои читатели, входя в храм науки, оценит ее величие и красоту и укрепится в желании посвятить ей свою жизнь.

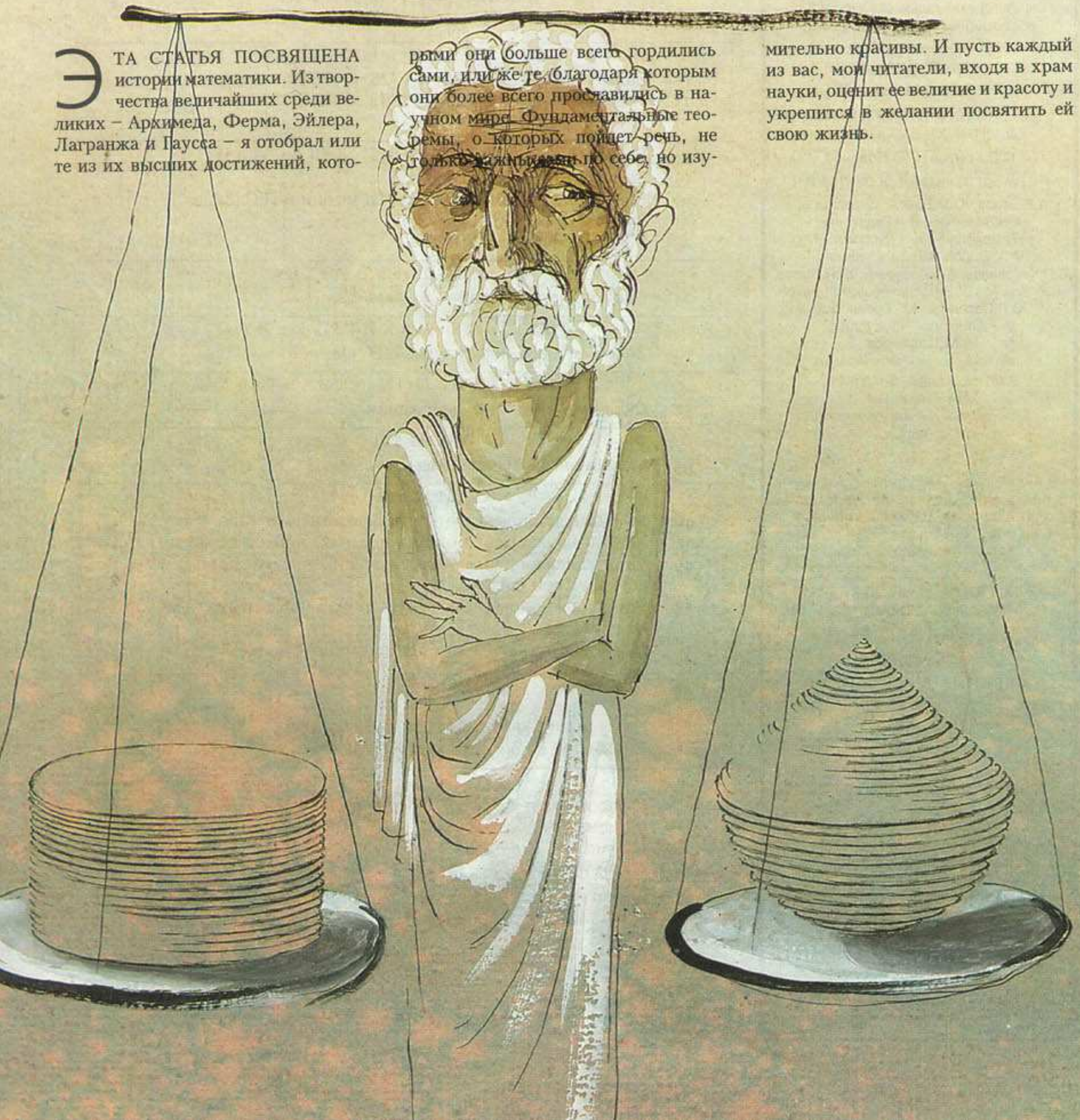


Иллюстрация П.Чернуского

Архимед и его формула для объема шара

Я вдруг обнаружил маленькую колонну, вершина которой поднималась из зарослей. На ней были изображены шар и цилиндр, которые я искал. Я тотчас же сказал сопровождавшим меня, что перед нами, несомненно, могильный памятник Архимеда.

Цицерон

Архимед (ок. 287—212 до н.э.) — величайший ученый Древнего мира. Имя его овеяно легендами. Мы восклицаем: «Эврика!» — выражая, как Архимед, восторг по поводу своей удачи. Каждый знает, что он может перевернуть мир, если найдется надежная точка опоры. У каждого перед глазами сцена: убийца с обнаженным мечом и сидящий старец, восклицающий: «Не трогай моих чертежей!»

Архимед общепризнанно считается одним из величайших гениев в истории человечества. Его вклад в математику огромен. Именно он придумал формулу для определения площади треугольника по его сторонам (она известна нам как формула Герона). Не кто иной, как Архимед первый дерзнул исчислить размеры окружающего нас мира. Он определил границы для числа π, доказав, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Вплотную он подошел к понятию определенного интеграла, опередив человечество почти на два тысячелетия. Ему принадлежат точные формулировки законов природы, сохранившиеся в неприкосновенности на все времена. Но более всего он гордился найденной им формулой объема шара, и в память об этом потомки изобразили шар и цилиндр на его могильном камне.

Докажем, следуя идеям Архимеда, тот результат, который доставил ему высшую творческую радость.

Теорема 1. *Объем шара радиуса 1 равен* $\frac{4}{3}\pi$.

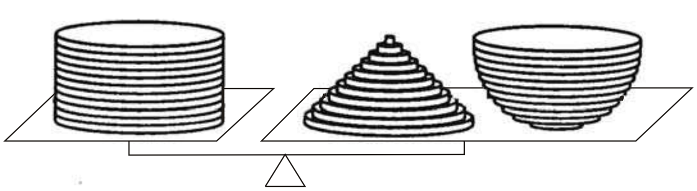
Доказательство. Мы будем опираться на следующие две формулы стереометрии: объем цилиндра с радиусом основания R и высотой H равен $\pi R^2 H$, и объем конуса с радиусом основания R и высотой H равен $\frac{1}{3}\pi R^2 H$. Эта последняя формула также принадлежит Архимеду.

А теперь перейдем к доказательству. Я надеюсь, вы еще не забыли детских игрушек, которые называются *пирамидками.* Вот как они устроены: имеются подставка с вертикальной палочкой и набор колечек разного размера. Надо нанизать эти колечки на палочку так, чтобы размеры колечек увеличивались по мере приближения к подставке. Тогда получится фигура, похожая на конус.

Доказательство теоремы Архимеда (по Архимеду) очень легко понять с помощью подобных игрушек. Только надо сделать не одну — коническую, а три разных — цилиндрическую (когда колечки будут иметь радиус 1, сами будут тоненькими-претоненькими, а если собрать их все вместе, то они образуют цилиндр высоты 1), коническую (из таких же тоненьких колечек, но разных радиусов, из которых можно собрать «почти» конус высоты и радиуса основания, равных 1) и «полушаровую» (опять-таки из таких же тоненьких колечек, из которых можно собрать «почти» полушар радиуса 1). При этом все колечки должны быть сделаны из одинакового материала.

Вслед за Архимедом, возьмем аптекарские весы с плоскими чашами и поставим на одну чашу собранную из колечек игрушку-цилиндр, а на другую — конус и полушар, причем конус поставим основанием на чашу весов, а полушар — «на голову», чтобы плоское основание полушара было сверху и расположено горизонтально.

Пусть высоты колечек одинаковы и равны δ, где δ — очень малое число. Подсчитаем, каков объем колечек, находящихся на одной и той же высоте h. У цилиндрического колечка этот объем равен $\pi\delta$, у конического $\pi(1-h)^2\delta$, а у «полушарного» $\pi\left(1-(1-h)^2\right)\delta$ (ибо радиус колечка у конуса равен $1-h$, а у полушара, по теореме Пифагора, $\sqrt{1-(1-h)^2}$). Суммарный объем на каждой из чаш весов оказался одинаковым. Но если δ очень мало, то коническая игрушка будет почти неотличима от конуса, полушаровая — от полушара, а цилиндрическая — всегда цилиндр.



В пределе получаем, что объем полушара радиуса 1 равен объему цилиндра с радиусом основания и высотой, равными 1, минус объем конуса с радиусом основания и высотой, также равными 1. Откуда и следует теорема 1.

Теорема Ферма—Эйлера о представлении простых чисел в виде суммы двух квадратов

Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что Древние знали не все.

Пьер Ферма

Пьер Ферма (1601—1665) — человек удивительной судьбы: один из величайших математиков всех времен, он не был, в современной терминологии, «профессиональным» математиком. По профессии Ферма был юристом. Он получил великолепное гуманитарное образование и был выдающимся знатоком искусства и литературы. Всю жизнь он проработал на государственной службе, последние 17 лет был советником местного парламента в Тулузе.

К математике его влекла бескорыстная и возвышенная любовь. В те годы не было еще математических журналов, и Ферма почти ничего не напечатал при жизни. Но он много переписывался со своими современниками, и посредством этой переписки некоторые его достижения становились известными. Пьеру Ферма повезло с детьми: сын обработал архив отца и издал его.

«Я доказал много исключительно красивых теорем», — сказал как-то Ферма. Особенно много красивых фактов удалось ему обнаружить в теории чисел, которую, собственно, он и основал.

Он внес огромный вклад в зарождающиеся новые направления, определившие последующее развитие науки: математический анализ и аналитическую геометрию. Мы признательны Ферма за то, что он приоткрыл для нас мир, полный красоты и загадочности.

Следующая теорема, несомненно, принадлежит к числу высших достижений математики XVII—XVIII веков.

Взгляните на несколько первых нечетных простых чисел:

$$3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$$

Числа 5, 13, 17 представимы в виде суммы двух квадратов: $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, а остальные числа (3, 7, 11, 19) эти свойством не обладают. Можно ли объяснить этот феномен? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. *Для того чтобы нечетное простое число было представимо в виде суммы двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы оно при делении на 4 давало в остатке 1.*

Немного истории

На рождество 1640 года в письме от 25 декабря Пьер Ферма извещал без доказательства знаменитого Мерсенна, друга Декарта и главного посредника в переписке ученых того времени, о том, что «всякое простое число, которое при делении на четыре дает единицу, единственным способом представимо как сумма двух квадратов».

Спустя почти двадцать лет после письма Мерсенну в письме к Каркави, отправленном в августе 1659 года, Ферма приоткрывает замысел доказательства сформулированной выше теоремы. Он пишет, что основная идея доказательства состоит в *методе спуска*, позволяющем из предположения, что для какого-то простого числа вида $4n + 1$ заключение теоремы неверно, получить, что оно неверно и для меньшего числа того же вида и т.д., пока мы не доберемся до числа 5, когда окончательно придем к противоречию.

Первые доказательства, которые впоследствии были опубликованы, найдены Эйлером между 1742 и 1747 годами. Причем, желая утвердить приоритет Ферма, к которому он испытывал чувства глубочайшего уважения, Эйлер придумал доказательство, соответствующее описанному выше замыслу Ферма.

Воздавая должное обоим великим ученым (об Эйлере речь еще впереди), мы называем эту теорему *теоремой Ферма—Эйлера.*

Есть свойство, присущее почти всякому прекрасному математическому результату, равно как и почти всякой неприступной и прекрасной горной вершине: его можно штурмовать с разных сторон, и все пути доставляют наслаждение тому, кто не устрашится ими последовать.

В своей статье в «Кванте»[1] я привел три совершенно различных доказательства. Одно из них было придумано Лагранжем в XVIII веке, другое – Германом Минковским в XIX веке, а третье – нашим современником Даном Цагиром. Есть также очень красивое доказательство, использующее теорию делимости чисел вида $n + mi$, где n, m – целые.[2] Здесь я ограничусь лишь первым из названных.

Доказательство Лагранжа

Это доказательство опирается на следующую *лемму Вильсона*: если p – простое число, то число $(p-1)! + 1$ делится на p.

Чтобы не отвлекаться на доказательство этого вспомогательного факта, продемонстрирую лишь основную идею доказательства на примере простого числа 13. Для любого целого числа x $(2 \le x \le 11)$ найдется такое число y $(2 \le y \le 11)$, что $x \cdot y$ при делении на 13 дает в остатке 1. Действительно,

$$(13-1)! = 12! =$$
$$= (2\cdot 7)(3\cdot 9)(4\cdot 10)(5\cdot 8)(6\cdot 11)\cdot 12,$$

и при этом все произведения в скобках при делении на 13 дают в остатке 1, а значит, число 12! при делении на 13 даст в остатке 12, откуда (для выбранного нами числа 13) следует утверждение леммы Вильсона.

Из леммы Вильсона извлечем такое следствие: если p – простое число вида $p = 4n + 1$, где n – натуральное число, то $\left((2n)!\right)^2 + 1$ делится на p. Действительно, из леммы Вильсона следует, что $(4n)! + 1$ делится на p, и теперь необходимое утверждение вытекает из следующей выкладки:

$$(4n)!+1 = (2n)!(2n+1)\cdot\ldots\cdot(4n)+1 =$$
$$= (2n)!(p-2n)(p-2n-1)\cdot\ldots\cdot(p-1)+1 \equiv$$
$$\equiv (2n)!(-1)^{2n}(2n)!+1 \equiv$$
$$\equiv \left((2n)!\right)^2 + 1 \pmod p.$$

Обозначим $(2n)!$ через N. Мы доказали, что $N^2 \equiv -1 \pmod p$.

Теперь нам предстоит преодолеть основную трудность. Рассмотрим все пары целых чисел (m, s) такие, что $0 \le m \le \left[\sqrt{p}\right]$, $0 \le s \le \left[\sqrt{p}\right]$ (где через $\left[\sqrt{p}\right]$ обозначена целая часть числа $\sqrt{p}$ – наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{p}$). Число таких пар $\left(\left[\sqrt{p}\right]+1\right)^2 > p$. Значит, по крайней мере для двух *различных* пар (m_1, s_1) и (m_2, s_2) имеем: $m_1 + Ns_1 \equiv m_2 + Ns_2 \pmod p$, т.е. число $a + Nb$, где $a = m_1 - m_2$, $b = s_1 - s_2$, делится на p. При этом $|a| \le \left[\sqrt{p}\right]$, $|b| \le \left[\sqrt{p}\right]$. Но тогда число $a^2 - N^2b^2 = (a+Nb)(a-Nb)$ делится на p. Учитывая, что $N^2 \equiv -1 \pmod p$, получим, что $a^2 + b^2$ делится на p, т.е. $a^2 + b^2 = rp$, где r – натуральное число ($r \ne 0$, ибо иначе пары были бы одинаковы). С другой стороны, $a^2 + b^2 \le 2\left[\sqrt{p}\right]^2 < 2p$, т.е. $r = 1$ и $a^2 + b^2 = p$. Теорема 2 доказана.

Вопрос о представлении чисел в виде суммы двух квадратов исчерпывается следующим утверждением:

Натуральное число представимо в виде суммы целых чисел тогда и только тогда, когда все простые сомножители вида $4k + 3$ входят в разложение этого числа на простые сомножители с четными показателями.

Эйлер и его формула $e^{\pi i} = -1$

Его [Эйлера] творчество изумительно и в науке беспримерно.
А.Н.Крылов

Однажды, когда я учился в восьмом классе, мой друг и одноклассник написал мне формулу Эйлера, которой я посвящаю этот раздел. Тогда я уже знал, что e – это число: две целых, семь десятых, год рождения Толстого, год рождения Толстого и дальше – другие десятичные знаки, запоминать которые уже необязательно(e = 2,718281828…). Я знал также, что

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Разумеется, я имел представление о числе π, о том, что такое степень, и слышал о том, что i – это какое-то

---

[1] «Квант» №10 за 1991 г.

[2] См. об этом: Шнирельман Л.Г. Простые числа (М.: ГИТТЛ, 1940); Сендеров В., Спивак А. Суммы квадратов и целые гауссовы числа («Квант» №3 за 1999 г.).

мистическое число, квадрат которого равен −1. Формула Эйлера потрясла меня, как, пожалуй, ничто математическое не потрясало ни до, ни после. Эта формула восхищала не одного меня. Наш знаменитый академик, математик и кораблестроитель Алексей Николаевич Крылов, слова которого я поставил эпиграфом к этому разделу, видел в этой формуле символ единства всей математики, ибо в ней «−1 представляет арифметику, i − алгебру, π − геометрию и e − анализ».

Можно очень многое сказать о творце этой формулы Леонарде Эйлере (1707−1783) − гениальном математике, физике, механике и астрономе, прожившем значительную часть своей жизни в России и похороненном в Санкт-Петербурге.

Леонард Эйлер − один из величайших тружеников в истории науки. Ему принадлежит 865 исследований по самым разнообразным проблемам. В 1909 году швейцарское естественнонаучное общество приступило к изданию полного собрания сочинений Эйлера. С тех пор прошел срок больший, чем вся жизнь Эйлера, издано около семидесяти томов его сочинений, а издание еще не закончено.

Переписка Эйлера составляет свыше 3000 писем. Уже одно это − свидетельство необыкновенного нравственного облика ученого: дурным людям писем не пишут. Все ученые, современники Эйлера, делились с ним плодами своих размышлений, просили высказать свое суждение по интересующим их проблемам и всегда находили отклик и поддержку.

Душевная красота Эйлера отразилась во множестве его поступков. В предыдущем разделе я рассказывал о том, как Эйлер старался утвердить приоритет Ферма. Когда молодой Лагранж (о нем речь впереди) посвятил Эйлера в свои исследования в области вариационного исчисления, Эйлер направил ему письмо (от 2 декабря 1759 года, Лагранжу было тогда 23 года), и я не могу не привести его слова, слова высокого духовного благородства:

«Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, что только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после моих первых попыток я занимался едва ли не один, доведена до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение; я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать часть заслуженной тобою славы».

Теорема 3. $e^{\pi i} = -1$.

Доказательство. При доказательстве мы будем использовать следующую формулу (она носит название *бином Ньютона*):

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

где n − натуральное число, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Как известно,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Применим формулу бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots$$

(здесь мы выписали только несколько первых членов разложения). Перейдем в обеих частях равенства к пределу при $n\to\infty$ и получим следующее *разложение в ряд*:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots$$

Поясним, почему формальный переход к пределу дает такой ряд. Поскольку $(k+1)$-е слагаемое имеет вид

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

и при $n\to\infty$ сомножители в числителе стремятся к 1, то $(k+1)$-е слагаемое стремится к $\frac{1}{k}$! Конечно, с точки зрения современного математика, этот предельный переход необходимо строго обосновать. Но во времена Эйлера к вопросу о правомерности преобразований подходили довольно свободно. Сам Эйлер в подобных случаях поступал очень смело и практически всегда оказывался прав.

Рассуждая аналогично, можно получить разложение

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Это разложение впервые было получено именно Эйлером, и в его честь число e получило свое обозначение: e есть первая буква фамилии Euler.

Еще задолго до Эйлера были известны разложения в ряд синуса и косинуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Гениальная идея Эйлера состоит в том, что формулу для e^x можно применять не только к действительным, но и к комплексным числам:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots,$$

где z − произвольное комплексное число. Подставим в эту формулу $z = \pi i$ (где i − мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$):

$$e^{\pi i} = 1 + \pi i + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \frac{(\pi i)^3}{3!} + \frac{(\pi i)^4}{4!} + \frac{(\pi i)^5}{5!} + \ldots = 1 + \pi i - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3}{3!}i + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^5}{5!}i \ldots = \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \ldots\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Теорема 3 доказана.

Позднее, когда появилась строгая теория рядов, подобные выводы, восходящие к Эйлеру, были подтверждены, а все преобразования признаны законными.

(Продолжение следует)