Решения задач М1696—М1705, Ф1713—Ф1717

М1696. *В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт N − 1 рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.*

Рассмотрим некоторый путь, соединяющий некоторые два города, возможно включающий в себя некоторые закрытые после кризиса рейсы. Покажем, что в этом пути любой закрытый рейс можно заменить последовательностью незакрытых. Пронумеруем авиакомпании числами от 1 до N. В одной из авиакомпаний сохранились все рейсы; предположим, что в первой. Тогда в любой другой авиакомпании закрыли по одному рейсу. Рассмотрим только рейсы первой и второй авиакомпаний: из каждого города выходит по одному рейсу этих авиакомпаний. Следовательно, все города разбиваются на циклы. В одном из этих циклов закрыли один рейс. Очевидно, можно пролететь остальными рейсами этого цикла, следовательно, мы можем «обойти» любой закрытый рейс. Отметим, что мы при этом не используем рейсы других авиакомпаний, следовательно, аналогично можно обойтись без остальных закрытых рейсов.

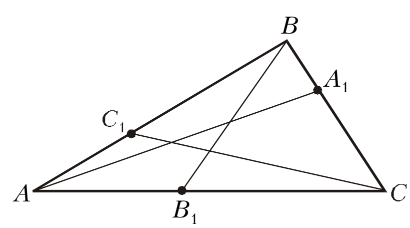
Д.Карпов

М1697. *Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа 44n равна 800. Чему равна сумма цифр числа 3n?*

Заметим, что $44n$ есть сумма 4 экземпляров числа n и 4 экземпляров числа $10n$. Если складывать эти числа поразрядно, то в каждом разряде окажется сумма учетверенной цифры из этого же разряда числа n и учетверенной цифры из следующего разряда. Если при этом не происходит никаких переносов, то каждая цифра числа n складывается 8 раз, и сумма цифр во всех разрядах оказывается равной 800. При переносах же сумма цифр, очевидно, уменьшается (так как из одного разряда вычитается 10, а к другому прибавляется только 1). Поэтому в ситуации условия задачи переносов не происходит. Это означает, в частности, что любая цифра числа n не превосходит 2. Тогда при умножении n на 3 просто умножается на 3 каждая его цифра, а значит, и сумма цифр. Поэтому сумма цифр числа $3n$ равна 300.

А.Голованов

М1698. *На сторонах треугольника ABC расположены точки A_1, B_1 и C_1 (см. рисунок). При этом известно, что $AA_1 \le 1$, $BB_1 \le 1$ и $CC_1 \le 1$. Докажите, что площадь треугольника не превосходит $1/\sqrt{3}$.*



Пусть треугольник ABC неостроугольный: $\angle BAC \ge \frac{\pi}{2}$. Тогда $AB \le B_1B \le 1$, $h_c \le CC_1 \le 1$ и $S_{\Delta ABC} \le \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

В случае остроугольного ΔABC высоты опущены на сами стороны (а не на их продолжения). Если $\angle BAC$ − наименьший угол треугольника, то, очевидно, $\angle BAC \le \frac{\pi}{3}$. Поскольку $h_a \le 1$, то из этого следует, что

$$\min\{AB, AC\} \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Значит, $S_{\Delta ABC} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Утверждение задачи доказано.

Замечание. Если A_1, B_1, C_1 – некоторые точки прямых (но не обязательно отрезков!) BC, CA, AB соответственно, то утверждение задачи теряет силу. Покажем это: для произвольного числа $\varepsilon > 0$ построим треугольник, все высоты которого меньше ε, а площадь – больше 1.

Пусть окружность O, диаметр которой меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, касается прямой l; точки B и C лежат на l так, что равнобедренный ($AB = AC$) треугольник ABC описан около окружности O. Выберем точку A так, чтобы было $h_a < \frac{\varepsilon}{2}$. При этом, очевидно, площадь треугольника ABC может быть сделана больше 1; покажем, что $h_b = h_c < \varepsilon$.

Пусть $AD = h_a$, DE – перпендикуляр из точки D на прямую AB. Очевидно, $h_c = 2DE$; но $DE < AD < \frac{\varepsilon}{2}$. Получим $h_c < \varepsilon$.

В.Сендеров

М1699. *Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство*

$$\left\{\sqrt{1}\right\} + \left\{\sqrt{2}\right\} + \ldots + \left\{\sqrt{n^2}\right\} \le \frac{n^2 - 1}{2}.$$

(Здесь $\{k\}$ – дробная часть числа k.)

При $n = 1$ неравенство обращается в равенство $0 = 0$. При $n > 1$ докажем, что сумма дробных частей на каждом промежутке между двумя последовательными квадратами удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=m^2}^{m^2+2m} \left\{\sqrt{k}\right\} \le \frac{2m+1}{2}. \qquad (1)$$

Нетрудно проверить (например, с помощью очевидного неравенства $\sqrt{m^2 + x} \le m + \frac{x}{2m}$), что

$$\sqrt{m^2 + a} + \sqrt{m^2 + 2m - a} \le 2m + 1$$

при $0 \le a \le m$.

Следовательно,

$$\left\{\sqrt{m^2 + a}\right\} + \left\{\sqrt{m^2 + 2m - a}\right\} \le 1. \qquad (2)$$

Просуммировав эти неравенства при $a = 0, 1, \ldots, m - 1$ и неравенство $\left\{m^2 + m\right\} \le \frac{1}{2}$ (получаемое делением на 2 обеих частей (2) при $a = m$), приходим к неравенству (1). Суммируя неравенство (1) по всем m от 1 до $n - 1$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \left\{\sqrt{k}\right\} \le \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Остается заметить, что $\left\{\sqrt{n^2}\right\} = 0$.

А.Храбров

М1700*. *На числовой прямой отмечены точки с координатами 1, 2, 3, ..., 2n. Блоха начинает прыгать из точки 1 и через 2n прыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвращается в исходный пункт. Известно, что сумма длин всех прыжков за исключением последнего равна n(2n − 1). Докажите, что длина последнего прыжка блохи равна n.*

Натуральные числа от 1 до $2n$ расставим в той последовательности, в какой в них попадает блоха:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2n}. \qquad (1)$$

Общая длина всех прыжков представляется циклической суммой, оценка сверху для которой такая:

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2n-1} - x_{2n}| + |x_{2n} - x_1| \le$$

$$\le 2(2n + 2n - 1 + \ldots + n + 1) -$$

$$- 2(n + n - 1 + \ldots + 2 + 1) = 2n^2.$$

В силу этого и условия задачи длина последнего прыжка блохи не превосходит n, т.е. $|x_{2n} - x_1| \le n$, или $x_{2n} \le n + 1$. Нам нужно доказать, что $x_{2n} = n + 1$.

Допустим противное, т.е. $x_{2n} \le n$. Но тогда в последовательности (1) найдутся два соседних члена x_i и x_{i+1}, каждый из которых больше n. Перестроим последовательность (1):

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots, x_{i+1}. \qquad (2)$$

Циклическая сумма S для (2) удовлетворяет оценке сверху:

$$|x_1 - x_2| + \ldots + |x_i - x_{2n}| + |x_{2n} - x_{2n-1}| + \ldots + |x_{i+1} - x_1| \le 2n^2.$$

В то же время

$$S = n(2n - 1) - |x_i - x_{i+1}| + |x_i - x_{2n}| + |x_{i+1} - 1|.$$

Оценив последнее выражение для S, легко заключить, что $S > 2n^2$, – противоречие. Значит, $x_{2n} = n + 1$.

В.Произволов

М1701. *Для некоторых положительных чисел x и y выполняется неравенство $x^2 + y^3 \ge x^3 + y^4$. Докажите, что $x^3 + y^3 \le 2$.*

Вначале докажем, что

$$x + y^2 \ge x^2 + y^3. \qquad (*)$$

Допустим противное: $x + y^2 < x^2 + y^3$, тогда, складывая это неравенство с неравенством $x^3 + y^4 \le x^2 + y^3$, получим $\left(x + x^3\right) + \left(y^2 + y^4\right) < 2x^2 + 2y^3$, что противоречит неравенствам

$$x + x^3 \ge 2x^2 \text{ и } y^2 + y^4 \ge 2y^3.$$

Из (*) получаем

$$x + y^2 \ge x^2 + y^3 \ge x^3 + y^4,$$

откуда

$$2x + 2y^2 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4.$$

Замечая, что

$$\left(1 + x^2\right) + \left(1 + y^4\right) \ge 2x + 2y^2 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4,$$

получаем неравенство

$$2 + x^2 + y^4 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4,$$

равносильное требуемому.

С.Злобин

М1702*. *В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.*

Возьмем граф на 12 вершинах, которые соответствуют людям; две его вершины соединены, если люди незнакомы.

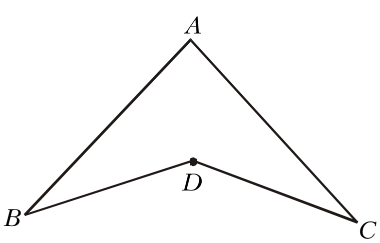
Если в этом графе нет циклов нечетной длины, то его можно разбить на две части, в каждой из которых вершины не будут соединены, и поэтому найдутся 6 попарно знакомых.

Предположим теперь, что в графе есть циклы нечетной длины. Рассмотрим нечетный цикл минимальной длины. Пусть его длина равна:

а) 2. Тогда если среди 9 человек, не входящих в этот цикл, есть два незнакомых, то среди оставшихся 7 человек из каждых 4 найдутся три знакомых. Таким образом, в подграфе на 7 вершинах каждые два ребра имеют общую вершину. Третье ребро обязано проходить через эту вершину. Иначе среди 4 человек не найдется трех знакомых. Поэтому все ребра имеют общую вершину, и, удаляя эту вершину, мы получаем 6 попарно знакомых.

б) 5. Тогда, как и выше, среди оставшихся 7 из каждых 4 найдутся 3 знакомых и среди этих 7 найдутся 6 знакомых.

в) 7. Тогда среди 5 человек, не входящих в этот цикл, все попарно знакомы. Если есть человек из цикла, знакомый со всеми этими 5, то все доказано. В противном случае, каждый из цикла не знаком с кем-то из оставшихся. Так как $7 > 5$, то найдется человек A из оставшихся, не знакомый с двумя из цикла – B и C (см. рисунок). Из того, что мы взяли цикл минимальной длины, следует, что эти два незнакомых из цикла должны быть знакомы через одного D. Но тогда D знаком со всеми из пяти оставшихся, потому что, удаляя из цикла D и заменяя на A, мы получаем снова цикл длины 7, а в дополнении к циклу длины 7 все попарно знакомы.



г) 9. Цикла длины 9 не может быть по условию задачи.

д) 11. Тогда, как и выше при рассмотрении циклов длины 7, мы видим, что оставшийся человек может быть незнаком максимум с двумя из цикла. Но тогда в цикле легко найти 5 человек, знакомых между собой и с оставшимся. (Например, взяв идущих через одного по циклу и не знакомых с оставшимся.)

В.Дольников

М1703. *Для чисел a, b и c нашлись два неравных натуральных числа m и n такие, что $a^m + b^m + c^m = 0$ и $a^n + b^n + c^n = 0$. Докажите, что $abc = 0$.*

Пусть числа m и n нечетны и $abc \neq 0$. Тогда условия можно переписать в виде

$$x^n + y^n = z^n, \quad x^m + y^m = z^m,$$

где $x,\ y,\ z > 0$.

Если $x = y$, то $2^m = 2^n$.

Пусть $x > y$, $n > m$. Положим $\frac{y}{x} = t < 1$. Тогда

$$\left(1+t^n\right)^m = \left(1+t^m\right)^n.$$

Но $0 < t < 1$, поэтому $t^m > t^n$,

$$1+t^m > 1+t^n,$$

$$\left(1+t^m\right)^n > \left(1+t^n\right)^m.$$

Полученное противоречие доказывает равенство $abc = 0$.

Замечание. Используя свойства функции $y = x^\alpha$, где $\alpha > 1$, нетрудно доказать более сильное, чем утверждение задачи,

Предложение. Пусть

$$a^m + b^m + c^m + d^m = 0,$$

$$a^n + b^n + c^n + d^n = 0,$$

где $m \neq n$. Тогда числа a, b, c, d можно разбить на пары вида $(k,-k)$, $(l,-l)$.

В.Произволов, В.Сендеров

М1704*. *В квадрате $n \times n$ клеток бесконечной шахматной доски расположены n^2 фишек, по одной фишке в каждой клетке. Ходом называется перепрыгивание любой фишкой через соседнюю по стороне фишку, непосредственно за которой следует свободная клетка. При этом фишка, через которую перепрыгнули, с доски снимается. Докажите, что позиция, в которой дальнейшие ходы невозможны, возникнет не ранее чем через $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ ходов.*

Будем различать два типа ходов – внутренние и внешние, в зависимости от того, куда ставится фишка, делающая ход: внутрь исходного квадрата $n \times n$ клеток или вне его. Пусть получена позиция, где дальнейшие ходы невозможны, причем сделано k внутренних ходов и l внешних. Ясно, что никакие две фишки не находятся в соседних клетках, а в исходном квадрате $n \times n$ не менее чем $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ клеток пусты. Так как каждый внутренний ход увеличивал количество пустых клеток не более чем на 1, а каждый внешний – не более чем на 2, то имеем неравенство

$$k + 2l \geq \left[\frac{n^2}{2}\right]. \qquad (1)$$

Предположив теперь, что n четно, разобьем исходный квадрат на $\frac{n^2}{4}$ четырехклеточных квадратиков и заметим, что на каждый квадратик пришлось не менее двух ходов, в которых участвовали (делали ход или снимались с доски) фишки, стоявшие в клетках этого квадратика. Поскольку в каждом внутреннем ходе участвовали фишки не более чем двух квадратиков, а в каждом внешнем – не более чем одного, то

$$2k + l \geq 2\frac{n^2}{4}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем $k + l \geq \frac{n^2}{3} \geq \left[\frac{n^2}{3}\right]$, т.е. утверждение задачи в этом случае верно.

Легко видеть, что оно верно также при $n = 1$ и при $n = 3$.

В случае $n = 2m + 1$, где $m > 1$, в «кресте», образованном третьей сверху горизонталью и третьей слева вертикалью, выделим $2m$ «доминошек», а остальную часть исходного квадрата разобьем на m^2 четырехклеточных квадратиков. В каждом внутреннем ходе участвовать могли фишки, принадлежащие не более чем двум из m^2+2m рассматриваемых фигур, а в каждом внешнем – не более чем одной. Имеем неравенство

$$2k+l \geq 2m^2+2m, \qquad (3)$$

поскольку фишки каждого из квадратиков участвовали не менее чем в двух ходах, а фишки каждой «доминошки» – по крайней мере в одном.

Из (1) и (3) следует, что

$$3(k+l) \geq 4m^2+4m = n^2-1.$$

Если здесь $n^2 \equiv 0 \pmod 3$, то, очевидно

$$3(k+l) \geq n^2, \text{ и } k+l \geq \frac{n^2}{3} = \left[\frac{n^2}{3}\right],$$

в противном случае $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ и $k+l \geq \dfrac{n^2-1}{3} = \left[\dfrac{n^2}{3}\right]$.

Тем самым, утверждение задачи полностью доказано.

Можно показать дополнительно, что для всякого $e < 1/2$ минимальное количество ходов, начиная с некоторого номера n, превышает en^2. Такая оценка получена Игорем Певзнером (Кировский физико-математический лицей), финалистом XXV Всероссийской математической олимпиады.

С.Токарев

М1705. *Через точку внутри сферы проведены три попарно перпендикулярные плоскости, которые рассекли сферу на 8 криволинейных треугольников. Эти треугольники закрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета (рис.1). Докажите, что площадь черной части сферы равна площади ее белой части.*

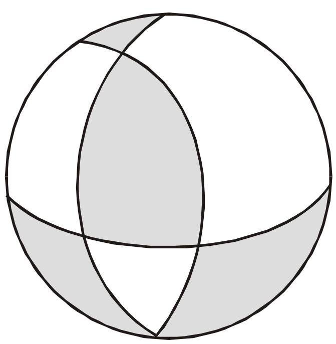


Рис.1

Докажем равносоставленность черной и белой частей сферы, тем самым будет доказана их равновеликость. Обозначим через α, β и γ плоскости, рассекающие сферу, а через $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$ – плоскости, соответственно симметричные им относительно центра сферы. Эти шесть плоскостей рассекают сферу на попарно равные куски так, что один из них белый, а другой черный в каждой паре. Однако этот факт легко услышать, но труднее увидеть.

Чтобы увидеть было легче, будем следовать принципу постепенности. Между плоскостями α и $\bar{\alpha}$, которые будем считать горизонтальными, расположен сферический пояс, выше и ниже которого располагаются две сферические «шапки». Заметим, что плоскости β, $\bar{\beta}$, γ и $\bar{\gamma}$ разрезают эти шапки на части так, что каждая белая часть одной шапки симметрична черной части другой шапки относительно горизонтальной плоскости π, проходящей через центр сферы.

Осталось разобраться со сферическим поясом. Для этого воспроизведем на рисунке сечение сферы плоскостью π, на котором показаны следы секущих плоскостей и следы черных и белых кусков сферического пояса (рис.2). Одинаковым номерам соответствуют следы тех кусков, которые симметричны и имеют разные цвета.

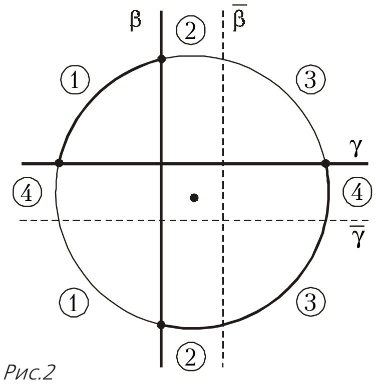


Рис.2

Напоследок заметим, что объектом утверждения задачи может выступать не только сфера, но любая поверхность выпуклого тела, имеющего три попарно перпендикулярные плоскости симметрии (например, эллипсоид или правильный октаэдр; случай с октаэдром особенно интересен, поскольку у него существуют различные попарно перпендикулярные тройки плоскостей симметрии). Но в указанном смысле также любопытен и случай с обыкновенным кубом (рис.3).

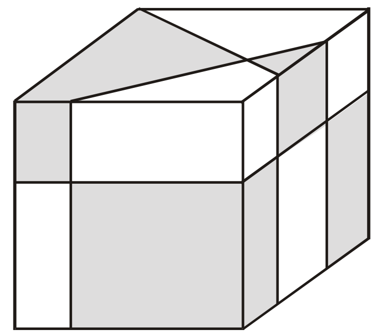
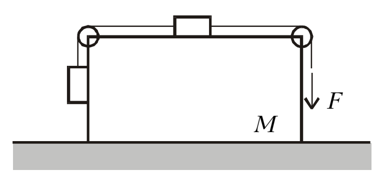


Рис.3

В.Произволов

Ф1713. *Система состоит из большого тела массой M, к которому прикреплены два блока, и двух одинаковых гладких тел массой M/5 каждое (см. рисунок). Каким должен быть коэффициент трения между большим телом и поверхностью стола, чтобы это тело могло оставаться неподвижным при любых значениях направленной вертикально вниз силы $\vec{F}$? Нити считать легкими и нерастяжимыми, трение учитывать только между поверхностью стола и большим телом. Считайте, что за время решения этой задачи тела не успеют удариться о блоки.*



Силы натяжения нити у правого блока равны F. Обозначим силы натяжения у левого блока через T. Тогда ясно, что сдвинуть большое тело в горизонтальном направлении «пытается» разность сил $F-T$, а прижимает его к столу сумма сил $N = Mg + 0{,}2Mg + F + T$. Если выполняется условие $F - T \leq \mu N$, то большое тело может оставаться неподвижным. Осталось выразить силу T и записать условие для коэффициента трения μ.

Считая большое тело неподвижным, запишем уравнения движения для подвижных тел:

$$F - T = 0{,}2Ma, \quad T - 0{,}2Mg = 0{,}2Ma,$$

откуда найдем силу T:

$$T = 0{,}5F + 0{,}1Mg.$$

Для коэффициента трения получим

$$\mu \ge \frac{0{,}5F - 0{,}1Mg}{1{,}5F + 1{,}3Mg}.$$

При малых значениях силы F в числителе следует поменять знак. Простой анализ показывает (но это и так ясно), что максимальное требуемое значение для μ получается при очень больших значениях силы F – в таком случае коэффициент трения должен превышать $1/3$.

З.Рафаилов

Ф1714. *Внутри большого теплоизолированного сосуда находится 32 г кислорода, температура сосуда и кислорода 300К, манометр показывает давление 1 атм. Еще внутри сосуда находится очень легкая капсула, содержащая 1 г гелия при температуре 500 К. Капсула лопается, и гелий выходит из нее в сосуд. Как будут меняться со временем показания манометра? Теплоемкость большого сосуда составляет 1000 Дж/К.*

Сразу после того, как капсула лопнет, произойдет кратковременный скачок давления, связанный с «акустическим ударом», но в силу своей инерционности манометр на него может среагировать довольно слабо. После затухания упругих волн (это происходит быстро) газы перемешиваются, и на некоторое время устанавливается температура, определяемая тепловым балансом без учета теплоемкости сосуда. Эту температуру и соответствующее давление мы найдем с учетом того, что двухатомного кислорода в сосуде 1 моль и его теплоемкость составляет C_1 = 1 моль$\cdot 2{,}5R \approx 20{,}8$ Дж/К, а одноатомного гелия 0,25 моль и его теплоемкость равна C_2 = 0,25 моль$\cdot 1{,}5R \approx$ $\approx 3{,}1$ Дж/К. Из равенства

$$\left(C_1 + C_2\right)T = C_1T_1 + C_2T_2$$

найдем результирующую температуру:

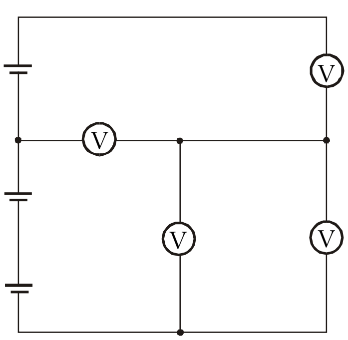
$$T \approx 330 \text{ К}.$$

Давление возрастет как за счет увеличения температуры от 300 до 330 К, так и за счет увеличения количества газа от 1 до 1,25 моль, т.е. увеличится примерно в 1,4 раза и будет чуть меньше 1,4 атм.

По мере выравнивания температур, с учетом большой теплоемкости сосуда, температура практически снизится до первоначальной, а избыток давления будет связан только с увеличившимся количеством газа – показания манометра плавно снизятся до 1,25 атм.

А.Теплов

Ф1715. *Собрана схема их трех одинаковых батареек по 9 В и четырех одинаковых вольтметров (см. рисунок). Найдите показания приборов.*



Пусть нижние вольтметры покажут U, тогда показание верхнего вольтметра составит $(3U_0 - U)$, где U_0 = 9 В, а показание среднего вольтметра будет $(2U_0 - U)$. Полярность показаний вполне очевидна – стоит только мысленно разорвать цепь между точкой соединения всех вольтметров и батарейками. Вольтметры одинаковые, значит, токи через них пропорциональных их напряжениям и сумма токов (или напряжений) нижних вольтметров равна сумме токов (напряжений) верхнего и среднего приборов:

$$U + U = (3U_0 - U) + (2U_0 - U),$$

откуда

$$U = 11{,}25 \text{ В}.$$

Таким образом, нижние вольтметры показывают по 11,25 В, показание верхнего вольтметра 15,75 В, а среднего 6,75 В.

А.Повторов

Ф1716. *Две одинаковые катушки индуктивности расположены недалеко друг от друга. Одна из них подключена к источнику синусоидального переменного напряжения последовательно с амперметром, к концам другой катушки подключен второй амперметр. Амперметры показывают 1 А и 0,2 А (угадайте сами, какой из них показывает 1 А, а какой 0,2 А). Один из амперметров отключают (при отключении амперметра цепь разрывается). Что покажет после этого оставшийся амперметр? Катушки, приборы и источники можно считать идеальными. Сопротивление проводов пренебрежимо мало.*

Ясно, что больший ток течет через амперметр, подключенный к источнику переменного напряжения. Ток через неподключенную вторую катушку связан с наличием магнитного потока первой катушки, пронизывающего вторую. Ток этой катушки тоже создает магнитный поток, пронизывающий первую катушку, и влияет на ток в ее цепи. В цепи второй катушки нет активного сопротивления – по условию задачи элементы цепи можно считать идеальными, – это означает, что ее собственный магнитный поток LI_2 (здесь L – индуктивность катушки) должен полностью уравновесить магнитный поток Φ от первой катушки:

$$LI_2 - \Phi = 0.$$

Ток второй катушки меньше, он создает в первой катушке поток, равный $\Phi\left(I_2/I_1\right)$. Полный магнитный поток через первую катушку составит

$$LI_1 - \Phi\left(I_2/I_1\right).$$

Производная от этой величины равна по модулю напряжению источника.

Теперь ответы. Если разорвать цепь первой катушки, то оба тока упадут до нуля. Если же разорвать цепь второй катушки, то пропадет добавочный магнитный поток, пронизывающий первую катушку, и для тока I в этой катушке можно записать

$$LI = LI_1 - \Phi\frac{I_2}{I_1},$$

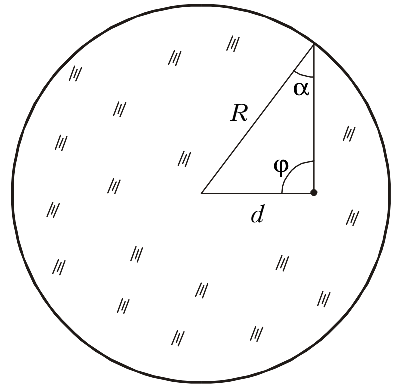
откуда

$$I = I_1 - \frac{\Phi}{L}\frac{I_2}{I_1} = I_1\left(1 - \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2\right) = 0{,}96 \text{ А}.$$

Р.Александров

Ф1717. *На расстоянии d = 0,6 см от центра стеклянного шара радиусом R = 1 см находится точечный источник света. При каких значениях коэффициента преломления стекла n весь испускаемый источником световой поток выйдет наружу? Оцените долю вышедшего наружу потока при n_1 = 1,6. Снаружи – вакуум; источник излучает во все стороны равномерно.*

Падающий на границу раздела двух сред тонкий пучок света частично отражается, частично преломляется, и часть энергии (светового потока) при этом уходит в окружающую шар среду. Следующие падения остатка пучка происходят под теми же углами к нормали в точке падения, и каждый раз такая же часть энергии уходит из шара наружу. Если нет заметного поглощения энергии внутри, то, казалось бы, вся испущенная источником энергия уйдет наружу. Что же может помешать этому? Вспомним, что не всегда существует преломленный луч – при падении пучка под большими углами к нормали возможно полное внутреннее отражение, когда весь поток отражается назад в оптически более плотную среду (в нашем случае – в стекло). Найдем максимальный угол падения луча на сферическую поверхность, при котором полного отражения еще не произойдет. По теореме синусов (см. рисунок)



$$\frac{R}{\sin\varphi} = \frac{d}{\sin\alpha},$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{d}{R}\sin\varphi .$$

Видно, что значение синуса угла падения не превосходит 0,6; это значит, что при величине коэффициента преломления меньше $1/0{,}6 = 1{,}66\ldots$ полного внутреннего отражения не произойдет. В нашем случае $n_1 = 1{,}6$ меньше этого значения (вот если бы в условии был указан коэффициент преломления 1,7, было бы, что посчитать!); следовательно, весь поток выйдет из шара.

А.Зильберман

НАМ ПИШУТ

Как покупать и как эксплуатировать батарейки?

Устройство и механизм работы гальванических элементов в общем нам известны. Но при пользовании ими возникает масса конкретных вопросов. Рассмотрим два из них: дешевые или дорогие батарейки лучше покупать и как полнее использовать энергию аккумулятора в плейере?

Начнем с первого вопроса. В газете «Известия» за 21 января 1998 года были опубликованы данные испытания батареек «элемент 316», применяющихся в плейерах и диктофонах. Для батареек разных фирм было определено время работы в плейере – основное и после «отдыха» в течение 6 часов. Оказалось, что более дорогие батарейки позволяют, естественно, слушать музыку дольше, но при этом стоимость часа работы дорогих батареек, в общем, выше. Так и должно быть – это плата за удобство: реже приходится менять элементы.

Однако из опубликованных данных можно сделать и более тонкие выводы. Разброс стоимости часа работы батареек зависит от стоимости батареек, причем чем батарейки дешевле, тем разброс больше. Дорогие батарейки все похожи, дешевые – все разные: могут быть почти такие же (по стоимости часа работы), как дорогие, а могут быть и намного хуже. Отсюда мораль: если у вас нет конкретной информации, покупайте дорогие – это надежнее. Покупая дешевые батарейки, можно выгадать, и немало, но только если вы располагаете информацией о данном товаре (или фирме). (Не относится ли это вообще к стратегии покупателя на рынке?)

Теперь обратимся к проблеме «аккумулятор в плейере». Некоторые из тех, кто ставил аккумуляторы в любимую звучащую игрушку, были неприятно удивлены – аккумуляторы работали меньше, чем им полагалось, исходя из их емкости и тока разряда. Расследование показало, что плейеры перестают работать при относительно небольшом разряде, так как напряжение аккумуляторов вообще меньше, чем у батарей. Конечно, даже так эксплуатировать аккумуляторы дешевле, но можно поступить хитрее. После того как два аккумулятора окажутся подсевшими, берем два свежих заряженных аккумулятора и каждый из подсевших доразряжаем в паре со свежим. Недостаток метода в том, что надо иметь 4 аккумулятора, но обычно потребитель их имеет, чтобы не оказаться в ответственный момент без энергии. Эксперимент показал, что в таком режиме аккумуляторы работают

2,5 часа (свежая пара) + 1 час (свежий + севший) +

+ 1 час (второй свежий + второй севший) +

+ 1,5 часа (пара свежих, работавших в паре с севшими) =

= 6 часов.

По стандартной методике они работали бы 5 часов (2,5 + 2,5). Итого, выигрыш 20%. При большем количестве эксплуатируемых аккумуляторов выигрыш увеличивается: при 6 аккумуляторах – до 30%, при очень большом количестве – до 40%. Для батареек этот эффект несколько слабее и при использованнии 4 батареек составляет от 10 до 20%.

И.Гольдфаин