«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Может. Например, из цифр 1, 1 и 3 составляются лишь простые трехзначные числа 113, 131, 311.

2. Пусть x, y, z – соответственно количество троек, четверок и пятерок. Тогда решение задачи сводится к решению системы в натуральных числах

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ 3x+4y+5z=46. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 5 и вычтя из результата второе уравнение, находим $2x+y=4$. Отсюда $x=1$, $y=2$, и, следовательно, $z=7$. Шестиклассник получил одну тройку, две четверки и семь пятерок.

3. Можно. Для этого на левую чашку весов положим один красный и два синих шарика, а на правую – один желтый и два зеленых. Белые шарики вообще на весы не кладем. Затем с помощью гирь-разновесов определяем, какая чашка тяжелее и на сколько граммов. Здесь возможны следующие варианты:
1) Если легкими являются белые шарики, то весы, очевидно, будут в равновесии.
2) Если легкие шарики – красные, то левая чашка будет на 1 грамм легче правой.
3) Если легкие шарики – синие, то левая чашка будет на 2 грамма легче правой.
4) Если легкие шарики – желтые, то левая чашка будет на 1 грамм тяжелее правой.
5) Если легкие шарики – зеленые, то левая чашка будет на 2 грамма тяжелее правой.
Как видно, пяти возможным вариантам соответствуют различные состояния весов, что позволяет однозначно определить, какая пара шариков легче.

4. Назовем сумму площадей красных прямоугольников красной площадью, а сумму площадей синих прямоугольников – синей площадью.
Заметим, что перемещение секущих плоскостей параллельно граням куба изменяет красную и синюю площади на одну и ту же величину (см. рис.1, на котором изображена развертка двух соседних граней куба).

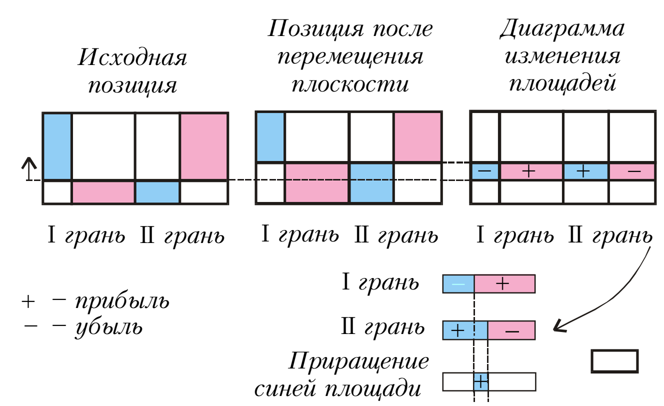

Рис. 1

Если провести секущие плоскости через центр куба, то все закрашенные прямоугольники превратятся в равные квадраты (рис.2) и красная площадь станет равной синей площади. Следовательно, это свойство равенства площадей будет выполняться и для любого начального положения секущих плоскостей.

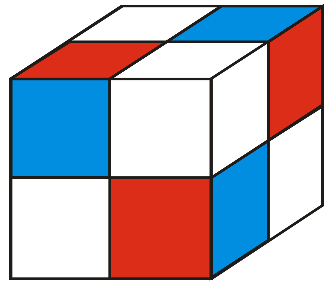

Рис. 2

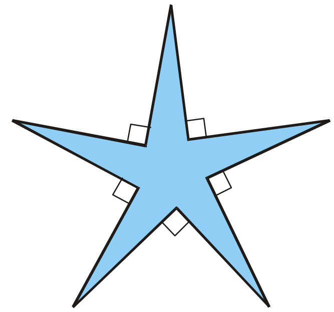

Рис. 3

5. См., например, рис.3.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №5 за 1999 г.)

6. Докажем, что сумма невычеркнутых чисел не может быть простым числом. Пусть несколько строк и столбцов вычеркнуты. Тогда оставшиеся числа представляют собой всевозможные попарные произведения номеров невычеркнутых столбцов. Но сумма этих попарных произведений, очевидно, равна произведению суммы номеров невычеркнутых строк на сумму номеров невычеркнутых столбцов, т.е. произведению двух чисел, каждое из которых заведомо не меньше 2. Поэтому она не может быть простым числом.
Что касается суммы вычеркнутых чисел, то она вполне может оказаться простым числом. Например, если зачеркнуть все числа строки под номером 3 и столбца под номером 5, то сумма вычеркнутых чисел будет равна $6+9+12+15+18+21+{}$ $+24+27+10+20+25+30+35+40+45=337$ – простому числу.

7. Пусть AH – высота треугольника. Круг с диаметром AB (AC) полностью покрывает треугольник ABH (ACH). Следовательно, точка O лежит либо в круге с диаметром AB, либо в круге с диаметром AC. В первом случае расстояние от точки O хотя бы до одной из вершин A и B не превосходит $\frac{c}{\sqrt{2}}$, во втором – расстояние от точки O хотя бы до одной из вершин A и C не превосходит $\frac{b}{\sqrt{2}}$. Так как $b\geq c$, то утверждение задачи доказано.

8. Предположим противное: пусть $a+b\neq 0$. Обозначим $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=2q$, где рациональное число $q\neq 0$, и пусть $\sqrt[3]{a}=$ $=q+\alpha$, где α – иррационально, тогда $\sqrt[3]{b}=q-\alpha$. Без ограничения общности можно считать $\alpha>0$. Имеем $a+b=$ $=(q+\alpha)^3+(q-\alpha)^3=6\alpha^2q+2q^3$, откуда $\alpha=\sqrt{r}$, где $r=$ $=\frac{a+b-2q^3}{6q}$. Но тогда число $a=\left(q+\sqrt{r}\right)^3=q^3+3q^2\sqrt{r}+{}$ $+3qr+r\sqrt{r}=q^3+3qr+\sqrt{r}\left(3q^2+r\right)$ не может быть рациональным. Полученное противоречие говорит о том, что исходное предположение неверно. Следовательно, $a+b=0$.

9. Прежде всего заметим, что число n четное. Если бы это было не так, то, отправляясь от какого-либо фиксированного числа и идя от числа к числу по кругу, мы сделаем нечетное количество шагов. При этом суммарное приращение величины окажется ненулевым, чего быть не может.
Назовем декрементом разность между суммой всех значительных чисел и суммой всех незначительных чисел. Первоначально декремент равен $S=M-m$. Элементарной операцией назовем вычеркивание наименьшего из незначительных чисел и соседнего с ним числа, считая по часовой стрелке. В результате применения элементарной операции к множеству из $n\geq 4$ чисел его структура не изменится: по-прежнему каждые

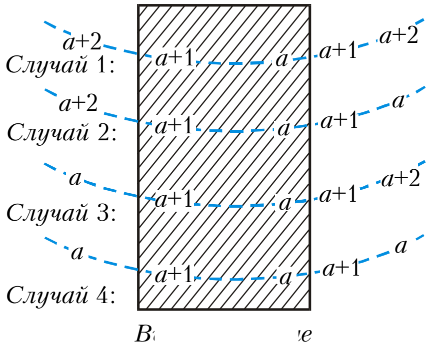

Рис. 4

два соседних числа из оставшихся будут различаться на 1 (на рисунке 4 наименьшее из незначительных чисел обозначено a). Однако в результате применения элементарной операции количество чисел уменьшается на 2, а величина декремента уменьшается на 1. Таким образом, через $S - 1$ шагов мы придем к структуре, состоящей всего из двух чисел и декрементом 1. Следовательно, $n - 2\cdot(S-1) = 2$, откуда $n = 2S = 2(M-m)$.

10. Воспользуемся следующим фактом: если натуральное число k представляется в виде разложения на простые множители $k = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – простые числа, а все показатели степеней $n_1, n_2, \ldots, n_m$ – целые неотрицательные числа, то количество делителей числа k выражается формулой $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_m+1)$ (см., например, по этому поводу энциклопедию для детей «Математика» издательства «Аванта +» (1998), с.157).

Запишем искомое число N в виде следующего разложения на простые множители: $N = 2^{n_2}\cdot 3^{n_3}\cdot 5^{n_5}\cdot 7^{n_7}\cdot\ldots\cdot p^{n_p}$, где n_2, n_3, n_5, …, n_p – неотрицательные целые числа, причем, поскольку число N делится на 100, то $n_2 \ge 2$, $n_5 \ge 2$. Согласно условию задачи, должно выполняться равенство

$$2^{n_2-2}\cdot 3^{n_3}\cdot 5^{n_5-2}\cdot 7^{n_7}\cdot\ldots\cdot p^{n_p} = (n_2+1)(n_3+1)(n_5+1)(n_7+1)\ldots(n_p+1). \quad (*)$$

Заметим, что при целом $m \ge 0$ для любого простого $p \ge 3$ выполняется неравенство $p^m \ge m+1$, причем равенство возможно лишь при $m = 0$. Отсюда

$$3^{n_3}\cdot 7^{n_7}\cdot 11^{n_{11}}\cdot\ldots\cdot p^{n_p} \ge (n_3+1)(n_7+1)(n_{11}+1)\ldots(n_p+1),$$

причем равенство здесь возможно лишь при $n_3 = n_7 = \ldots = n_p = 0$. Кроме того, применяя метод математической индукции, можно доказать, что при

$$1)\, n_5 = 2 \text{ и } n_2 > 6,\quad 2)\ n_5 = 3 \text{ и } n_2 > 4,\quad 3)\ n_5 > 3$$

произведение $2^{n_2-2}\cdot 5^{n_5-2}$ больше $(n_2+1)(n_5+1)$ и, следовательно, при таких значениях параметров n_2, n_5 равенство $(*)$ невозможно.

Разбор других случаев требует более тонкого анализа.

Для упрощения записи введем обозначения

$$A = 7^{n_7}\cdot 11^{n_{11}}\cdot\ldots\cdot p^{n_p},\qquad B = (n_7+1)(n_{11}+1)\ldots(n_p+1);$$

равенство $(*)$ запишется так:

$$2^{n_2-2}\cdot 3^{n_3}\cdot 5^{n_5-2}\cdot A = (n_2+1)(n_3+1)(n_5+1)\cdot B. \quad (**)$$

Отметим, что число A нечетное и $A \ge B$ (равенство здесь возможно лишь при $n_7 = n_{11} = \ldots = n_p = 0$).

При 4) $n_2 = n_5 = 2$, поскольку в правой части $(**)$ не должно быть четных сомножителей, то число n_3 обязательно должно быть четным. При $n_3 = 2$ в правой части $(**)$ степень тройки выше, чем в левой части; при $n_3 \ge 4$ левая часть $(**)$ превышает правую.

При 5) $n_2 = 3$; $n_5 = 2$, 6) $n_2 = 2$; $n_5 = 3$, 7) $n_2 = 3$; $n_5 = 3$ в правой части $(**)$ степень двойки выше, чем в левой.

При 8) $n_2 = 4$; $n_5 = 2$ в правой части $(**)$ степень пятерки выше, чем в левой.

При 9) $n_2 = 5$; $n_5 = 2$ в правой части $(**)$ показатель степени тройки не меньше 2, но в этом случае левая часть $(**)$ превышает правую.

При 10) $n_2 = 6$; $n_5 = 2$ в правой части $(**)$ показатель степени тройки не меньше 1, но в этом случае левая часть $(**)$ превышает правую.

При 11) $n_2 = 4$; $n_5 = 3$ равенство $(**)$ приводится к виду

$$3^{n_3} A = (n_3+1)B,$$

что возможно в одном-единственном случае $n_3 = n_7 = n_{11} = \ldots = n_p = 0$.

Итак, условию задачи удовлетворяет единственное число $N = 2^4\cdot 5^2 = 2000$. Его делители: 1, 2, 4, 8, 16, 5, 25, 125, 10, 50, 250, 20, 100, 500, 40, 200, 1000, 80, 400, 2000.

Качающаяся скала

1. Из требования минимума потенциальной энергии тела в положении устойчивого равновесия вытекает, что при отклонении тела от равновесия его центр тяжести повышается. Этот факт и позволяет вывести критерий устойчивости (2).

Найдем изменение высоты ΔH центра тяжести P, сравнивая положение скалы на рисунках 1 и 2 статьи. Поворот скалы без проскальзывания на круглой опоре можно представить как результат двух последовательных перемещений: поворота вокруг центра O' всей системы скала – опора как единого целого на угол α и далее поворот только скалы вокруг центра O на угол β. Поэтому

$$\Delta H = \Delta h_1 + \Delta h_2 = -(R+CP)(1-\cos\alpha) + PO(\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)).$$

Но $CP + PO = r$ по определению и $\alpha R = \beta r$ из-за отсутствия проскальзывания. Кроме того, для малых углов α (а также β и $\alpha + \beta$) справедливо приближенное равенство $\cos\alpha = 1 - \alpha^2/2$. Упрощая выражение для ΔH, получим

$$\Delta H = \frac{\alpha^2}{2}\left(-R - r + \left(1+\frac{R}{r}\right)^2 r - \left(1+\frac{R}{r}\right)^2 CP\right),$$

откуда следует, что в положении устойчивого равновесия, когда $\Delta H > 0$,

$$CP < \frac{Rr}{R+r},$$

т.е. получена формула (2). Критерий устойчивости можно записать также в виде

$$\frac{1}{CP} > \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$

Но величина, обратная радиусу кривизны поверхности тела, называется кривизной этой поверхности (см. Примечание к статье). Таким образом, мы доказали теорему, согласно которой для устойчивого равновесия тела на опоре величина, обратная расстоянию от центра тяжести тела до точки его контакта с опорой, должна быть больше, чем сумма кривизны поверхности тела и опоры в точке контакта.

2. Эта задача знакомит нас с еще одним понятием, важным для изучения равновесия тел. Речь идет о границах области устойчивости равновесного положения тела. Действительно, надо представлять, сколь большим может быть отклонение тела от положения равновесия, при котором оно, предоставленное потом самому себе, вернется в это положение. В случае достаточно больших отклонений тело потом сможет занять новое положение равновесия или будет совершать колебания около него. Равновесия может и не быть вовсе: любое новое положение тела оказывается неустойчивым.

Определять границы области устойчивости – это, как правило, задача более трудная, чем исследовать устойчивость тела, когда есть малый параметр – угол отклонения от положения равновесия. В качестве примера рассмотрим равновесие «ваньки-встаньки» на вершине неподвижной сферы радиусом

R. По условию, радиус основания «ваньки-встаньки» $r = R$. Отклоним игрушку на угол α относительно равновесного вертикального положения. Смещение центра тяжести ΔH по вертикали равно (см. упражнение 1)

$$\Delta H = \Delta h_1 + \Delta h_2 = -r - x - 2r\cos\alpha - r\cos 2\alpha + x\cos 2\alpha =$$
$$= -4r\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2(r-x)\sin^2\alpha,$$

где x – искомая величина расстояния CP от точки контакта игрушки с опорой (в положении равновесия) до центра тяжести. По условию, качение игрушки на опоре происходит без проскальзывания.

Как видно из формулы для ΔH, у игрушки с высоко расположенным центром тяжести, т.е. когда $x \approx r$, величина ΔH всегда отрицательна, поэтому равновесие неустойчивое. Но при небольших значениях x, т.е. когда центр тяжести «ваньки-встаньки» находится вблизи его основания, величина ΔH положительна, и игрушка на вершине сферы находится в равновесии. При ее отклонении на угол α она возвращается в исходное положение, если угол α не слишком велик. С ростом угла α центр тяжести игрушки поднимается, достигает максимальной высоты (при некотором угле α_0) и далее начинает опускаться. Как обычно при поиске экстремума, величина α_0 определяется из условия $\frac{dH}{d\alpha} = 0$, откуда находим

$$\cos\alpha_0 = \frac{R}{2(r-x)}, \text{ или } \frac{x}{r} = 1 - \frac{1}{2\cos\alpha_0}.$$

На рисунке 5 приводится график зависимости x/r от α_0. Из этого графика можно определить положение центра тяжести игрушки, если известен предельный угол α_0. Очевидно, что по условию α_0 не должен превышать $\pi/3$, а тогда центр тяжести оказывается удаленным от точки контакта с опорой на расстояние, меньшее $r/2$.

Чем ниже центр тяжести, тем устойчивее тело на опоре и тем шире область устойчивости. В нашей задаче из всех тел наибольшей устойчивостью обладает легкая, почти невесомая сфера с компактной, но тяжелой массой, закрепленной около ее основания. При качении такого тела по круглой опоре без проскальзывания центр тяжести тела описывает кривую, которая называется кардиоидой. (Это алгебраическая кривая четвертого порядка, частный случай так называемой эпициклоиды.) Уравнение кардиоиды в декартовых прямоугольных

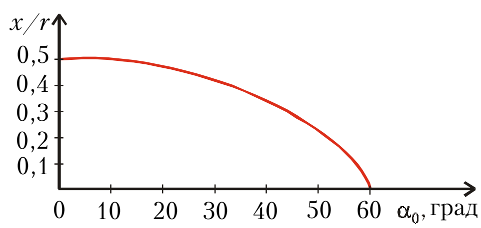

Рис. 5

координатах имеет вид $\left(x^2 + y^2 + 2ry\right)^2 = 4r^2\left(x^2 + y^2\right)$. Кардиоиду можно легко построить самим по точкам с помощью циркуля и линейки. По виду она напоминает сердце (рис.6), и этот факт отражен в самом названии кривой: греческое слово kardia означает сердце.

Мы показали, что угол между осью кардиоиды и отрезком, проведенным в точку, в которой касательная к кардиоиде параллельна x, равен $\alpha_{0\max}/2 = 30°$. Соответствующий этой точке максимальный подъем центра тяжести игрушки равен $\Delta H = r/2$. Если центр тяжести игрушки находится выше границы основания, то при вращении без проскальзывания на сфере того же радиуса этот центр описывает кривую, которая называется укороченной кардиоидой – одной из разновидностей улитки Паскаля.

3. Из условия задачи и неравенства $\frac{1}{CP} > \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ следует, что центр тяжести полушария находится от нижней его точки на расстоянии, меньшем $5r/8$. Но в точке на расстоянии $5r/8$ находится, как известно, центр тяжести однородного полушария. Таким образом, по сравнению с однородным телом такой же формы полушарие утяжелено книзу, чем и достигается устойчивость его равновесного положения на закрепленной сферической поверхности такого же радиуса.

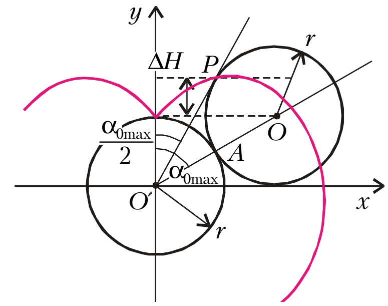

Рис. 6

4. Проскальзывание приведет к тому, что область устойчивости положения равновесия сузится. Для очень гладких и скользких поверхностей возможен случай, когда равновесие будет неустойчивым, где бы ни находился центр тяжести тела.

5. У скалы, вообще говоря, могут быть другие равновесные положения. Поэтому ее можно опрокинуть, наклонив на достаточно большой угол.

Калейдоскоп «Кванта»

1. *Указание*: отнюдь не шесть десятков.

2. 3 минуты.

3. Нет, не зависит. Условимся писать вместо знака «+» число +1, а вместо знака «–» – число –1. Операция стирания двух знаков не меняет произведения всех написанных на доске чисел, так что последнее оставшееся число будет равно произведению всех имеющихся вначале чисел.

Закон сохранения импульса

1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{(m_2 v_2)^2 + (m_3 v_3)^2}} = \frac{6}{5}$, $\alpha \approx 50°$.

2. $u = \frac{5}{6}v = 5$ м/с; $\Delta W = \frac{m}{2}\left(\frac{5}{6}v^2 + g^2t^2\right) = 63$ Дж.

3. 1) $v_1 = \sqrt{2g(H-h)}$; 2) $v_2 = \sqrt{\frac{8g(H-h)}{5}}$.

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

1. $x_1 = a^{b^2/4}$, $x_2 = a^{4/b^2}$ при $b > 2$; $x = a$ при $b = 2$; $a > 0$, $a \neq 1$.

2. При $p < 0$ решений нет; $\alpha = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, при $p = 0$;

$$-\arccos\frac{\sqrt{1+8p}-1}{4p} + 2\pi n \le \alpha \le \arccos\frac{\sqrt{1+8p}-1}{4p} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z},$$

при $p > 0$; при $p \ge 1$ в дополнение к предыдущим решениям появляются еще решения

$$\pi - \arccos\frac{\sqrt{1+8p}+1}{4p} + 2\pi m \le \alpha \le \pi + \arccos\frac{\sqrt{1+8p}+1}{4p} + 2\pi m,$$
$$m \in \boldsymbol{Z}.$$

3. $y = x^2 + 2x + 11$ и $y = -x^2 - 4x - 18$; $S = 57\frac{1}{6}$.

4. Минимальное значение равно –4 и достигается при $x = -2$, $y = -2$; максимальное равно $8\sqrt{3}$ и достигается при $x = 4/\sqrt{3}$, $y = 2\sqrt{3}$ и при $x = 2\sqrt{3}$, $y = 4/\sqrt{3}$.

5. $\frac{9p^2}{200}$. **6.** $\frac{3}{\sqrt{11}}$. **7.** $1/8$.

ФИЗИКА

1. 1) $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$; 2) $F = Mg\frac{\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mu}$.

2. $Q = \frac{9(T_2 - T_1) + (\alpha_2 T_2 - \alpha_1 T_1) + 2(\alpha_2 - \alpha_1)\varepsilon/k}{(T_2 - T_1) + \alpha_2 T_2 - \alpha_1 T_1}\frac{A}{2}$, где k – постоянная Больцмана.

3. 1) $\Omega'/\Omega = \sqrt{3}$; 2) $d'/d = 3$.

4. 1) $x = \frac{mgL}{B^2l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{B^2l^2v_0^2}{mg^2L}}\right)$;

2) $v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + \frac{mg^2L^2}{B^2l^2}}$, $I = \frac{mg}{Bl}$.

5. $a = F\left(\frac{d\omega}{d - F}\right)^2$.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left\{-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right\}$. **2.** $83\frac{1}{3}\%$.

3. $\pi(2n+1)$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\mathrm{arctg}\,2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Разложив левую часть на множители, получаем

$$(\cos x + 1)(\sin x + 3\cos x + 1) = 0.$$

4. $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

5. $\angle ANB = 30°$. *Указание.* Из подобия треугольников AMD и CMB следует, что $MC : AM = \frac{1}{2}$. Но это означает, что AC и BC – высоты треугольника ABC. Полезно также заметить, что расстояние от точки B до прямой AD в 2 раза больше расстояния от точки C до этой прямой.

Вариант 2

1. $\left\{\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right\}$. **2.** 400 чел.

3. $\pi(2n+1)$, $-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (-1)^{k+1}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + k\pi$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\angle AOB = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{145}}\right)$. **5.** $x = 3$; $y = 4$.

Вариант 3

1. 300 кг. **2.** $[1; 2) \cup (10; +\infty)$. **3.** 2.

4. $x_{1,2} = \frac{1 - 4k \pm \sqrt{16k^2 - 8k + 17}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$x_{3,4} = \frac{1 + 4k \pm \sqrt{16k^2 + 8k - 15}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, $k \neq -1$.

5. $\left(0; \frac{1}{12}\right]$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $E_к = m\left(v_0^2 - 2v_0\sin\alpha \cdot gt + g^2t^2\right)/2$.

2. $\mu_2 \geq \frac{(\mu_1\cos\alpha + \sin\alpha)\cos\alpha}{M/m + (\cos\alpha - \mu_1\sin\alpha)\cos\alpha}$.

3. $q = Q\frac{6R_1R_2}{(3R_1 + 2R_2)(3R_1 + 4R_2)}$. **4.** $n = 1/\sqrt{2}$.

5. $U = kL^2\frac{3|\rho_1 - \rho_2|}{4(\rho_1 + 3\rho_2)}$.

Вариант 2

1. $v_0 = \sqrt{2gh/\sin^2\alpha}$. **2.** $M = m\,\mathrm{tg}\,\alpha/(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)$.

3. $I_0 = I\frac{U(R_2 - R_1)}{(U - IR_1)R_2}$. **4.** $T_3/T_1 = \sqrt{\alpha}$.

5. $d = F(k+1)/k$.

Вариант 3

1. $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{g^2L^2}{v_0^2\cos^2\alpha} - 2gL\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. **2.** $a = g\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{M/m + \mathrm{tg}^2\alpha}$.

3. $r = (U_2 - U_1)R_1R_2/(U_1R_2 - U_2R_1)$. **4.** $V_4 = V_1V_3/V_2$.

5. $n = 1/\sqrt{\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2} = 2/\sqrt{3}$.

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 15 км/ч, 20 км/ч. **2.** $\pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. 4. **4.** $0 \leq x > 4$. **5.** 3; 5. **6.** $x = a + \sqrt{6 - a}$ при $a \in [-3; 2)$; $x = 4$ при $a = 5$. *Указание.* Система имеет единственное решение, если квадратное уравнение $x^2 - 2ax + a^2 + a - 6 = 0$ имеет один неотрицательный корень, не равный 6.

7. $4\sqrt{4 + \sqrt{2}}\,l$. *Указание.* Сечение AVC_1W (рис.7) будет иметь наименьший периметр, если на развертке боковых граней его стороны AV и VC_1 будут лежать на одной прямой.

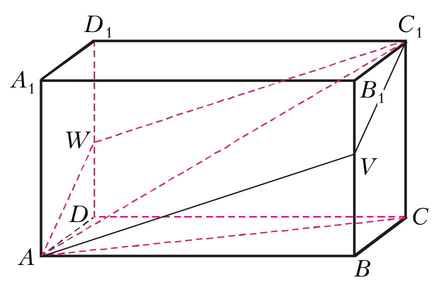

Рис. 7

Вариант 2

1. 21 день, 28 дней.

2. $y_{\min} = \frac{3}{4}$ при $x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y_{\max} = 3$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. 3. **4.** $(-3/2; -1/2) \cup (1; +\infty)$.

5. 100 . *Указание*. Если x – абсцисса вершины B прямоугольника (рис.8), то его площадь равна

$$S_{OABC} = S(x) = x(2x - 15)(12 - x) = -\left(2x^3 - 39x^2 + 180x\right),$$

причем $7{,}5 < x < 12$.

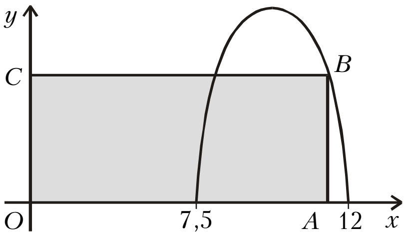

Рис. 8

6. $[3/2;\,2]\cup\{7/2;\,6\}$. *Указание.* Первое уравнение равносильно системе $x > 0$, $x \ne 1$, $x + y - 1 = 0$, откуда следует, что $y = 1$. Подставляя значение $y = 1$ во второе уравнение, получаем $x^2 - 2ax + 2a^2 - 7a + 6 = 0$. Заданная система уравнений имеет единственное решение, если это квадратное уравнение имеет ровно один положительный корень, не равный единице.

7. $24\pi l^2$.

Московский институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-\sqrt{2}$. **2.** 4. **3.** (2; 2), (−2; −2). **4.** $[6;\,+\infty)$. **5.** $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $\dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **6.** 30 км/ч. **7.** (1,5; 3,5). **8.** См. рис. 9. **9.** 2,5. **10.** $\dfrac{a^2}{(1+\cos\beta)^2}$. **11.** 2.

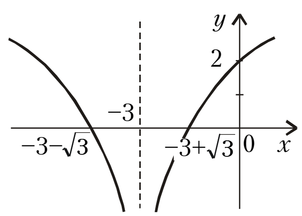

Рис. 9

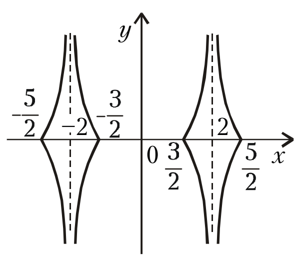

Рис. 10

Вариант 2

6. $\left[-2\sqrt{2};\,\dfrac{4-3\sqrt{3}}{2}\right]\cup[5;\,+\infty)\cup\left\{2\sqrt{2}\right\}$. **7.** См. рис. 10.

8. $x = \dfrac{3\pi}{2} - \arcsin\dfrac{3}{5} + 2\pi n$, $y = \arcsin\dfrac{3}{5} + 2\pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$, $z \in [-3;\,3]$. **9.** $\dfrac{\sqrt{61}}{2\sqrt{19}}$. **10.** 75%. **11.** $-\dfrac{65}{28}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gH} \approx 1000$ км/ч.

2. $m = \dfrac{F}{a + \mu g} = 4$ кг, где $a = 2$ м/с^2.

3. $\alpha_m = \dfrac{2\pi v_m}{gT} = \pi\cdot 10^{-2}$ рад $= 1{,}8°$. **4.** $\rho_2 = \dfrac{\Delta\rho}{\Delta p}p_2 = 1{,}5$ кг/м^3.

5. $\eta = 5/2$. **6.** $F_2 = 8F_1 = 800$ Н.

7. $R_в = \dfrac{R^2}{r} = 2\cdot 10^4$ Ом. **8.** $F = ev\sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 1{,}6\cdot 10^{-18}$ Н.

9. $\delta = 2H_2/H_1 = 1/2$. **10.** $p = \sqrt{2meU} \approx 9{,}6\cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

Вариант 2

1. $t = \dfrac{v}{a} - \sqrt{\dfrac{v^2}{a^2} - \dfrac{2l}{a}} = 24$ с. **2.** $\mu = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} = \dfrac{1}{3}$.

3. $x = \dfrac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2kH}{mg}}\right) \approx 3{,}2$ см.

4. $p = \dfrac{mRT}{MV}\left(1 + \dfrac{\alpha}{100\%}\right) \approx 3{,}9\cdot 10^5$ Па.

5. $H = \dfrac{Q}{mg}\left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right) = 25$ м. **6.** $E = \dfrac{2F}{q} = 10^4$ В/м.

7. $I_m = 2\sqrt{2}\pi\nu CU \approx 0{,}13$ А. **8.** $\mathcal{E} = \dfrac{\sqrt{2WL}}{t} \approx 14{,}1$ В.

9. $F = -\left(\sqrt{2}+1\right)a \approx -12$ см. **10.** $\eta = \dfrac{Nh\nu}{UI}\cdot 100\% \approx 0{,}1\%$.

Московский энергетический институт

МАТЕМАТИКА

1. $0{,}5a^2$ при $x > -a^4$, $x \ne 0$, $a \ne 0$.

2. $f(x) = \begin{cases} -x+1 \text{ при } x < -1, \\ -x-1 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

3. $f(x) = 6 - 4x$ при $0 \le x < \sqrt{2}$, $x \ne \sqrt{2}-1$;
если $-\sqrt{2} < a < 0$, $a \ne 1-\sqrt{2}$, то $x = -a$;
если $a = 0$, то $x = 0$;
если $0 < a < \sqrt{2}$, $a \ne \sqrt{2}-1$, то $x = a$;
при остальных a уравнение решений не имеет.

4. {−3; 3}. **5.** $\left[-\dfrac{3}{2};\,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};\,0\right]$. **6.** 48 км.

7. За 60 дней и за 20 дней. **8.** 140 = 11 + 129.

9. $a \ne \dfrac{\pi n}{3}$ ($n \in \boldsymbol{Z}$; $n \ne 0$, ± 6). **10.** $a \in \{-0{,}5;\,1\}$;
если $a = -0{,}5$, то $x = \dfrac{1}{3|b|}$ при $b \ne 0$;
если $a = 1$, то $x = \dfrac{1}{|b|}$ при $b \ne 0$;
при $b = 0$ решений нет.

11. $BM = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\dfrac{mS}{n}}$; $MC = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\dfrac{nS}{m}}$.

12. $\dfrac{\sqrt{3}H^3}{2}$. **13.** $\dfrac{S\cos\alpha}{2\sin\alpha + 1}$. **14.** $\dfrac{\sqrt{\pi R^5}}{2\left(\sqrt{\pi R^3} - \sqrt{2V}\right)}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\Delta m = \dfrac{pVM}{R}\dfrac{T_1 - T_2}{T_1T_2} = 3{,}9$ кг, где M = 29 г/моль – средняя молярная масса воздуха.

2. $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}U}{(\mathcal{E} - U)R} = 0{,}3$ А. **3.** $N = Mgv/2$.

Вариант 2

1. $T_0 = \dfrac{T_1}{1 + \rho gL/p_0}$. **2.** $U_2 = U_1\dfrac{I_0 - I_2}{I_0 + I_1} = 11{,}96$ В.

3. $F_{min} = \mu g\left(m_2 + m_1/2\right)$.

Вариант 3

1. $\alpha = 1 - p_2/p_1 = 0{,}2$. **2.** $r = R^2/R_в = 0{,}8$ Ом.

3. $m = \dfrac{N}{g + v^2/l}$.

Вариант 4

1. $p_2 = 2p_1T_2/(3T_1) = 1{,}17\cdot10^5$ Па. **2.** $r = \sqrt{R_1R_2} = 6$ Ом.
3. $Q = 4\pi R^3\rho gh/3 - mg(H+h) = 22{,}4$ мДж.

Вариант 5

1. $I_2 = \dfrac{2\mathcal{E}}{r+\mathcal{E}/I_1} \approx 1{,}1$ А. **2.** $q = -QR/l$.
3. $Q = m_1m_2v^2/\left(2(m_1+m_2)\right) = 120$ Дж.

Новосибирский государственный университет

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $p = p_0 + (2Mg + F_1 - F_2)/(2S)$.
2. Грузы движутся по окружности. Поскольку начальная скорость нулевая, начальные ускорения a грузов направлены по касательной к траектории (нет нормального, или центростремительного, ускорения) и одинаковы по величине для обоих грузов. Из второго закона Ньютона получаем

$$m_1a = m_1g\sin\alpha - N\cos\alpha,\ m_2a = -m_2g\sin\alpha + N\cos\alpha,$$

где N – сила, действующая со стороны стержня на каждый из грузов. Отсюда

$$a = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\sin\alpha = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\frac{L}{2r}.$$

3. Пусть q_x – искомый заряд, тогда заряды внешних пластин равны q_x и $-q_x$. Напряженности электрического поля в зазорах равны, соответственно, $q_x/(\varepsilon_0S)$, $(q-q_x)/(\varepsilon_0S)$, $q_x/(\varepsilon_0S)$, а направление поля во внешних зазорах противоположно направлению поля во внутреннем зазоре. После замыкания ключа и установления равновесия разность потенциалов между внешними пластинами должна быть равна нулю:

$$\frac{q_x}{\varepsilon_0S}d - \frac{q-q_x}{\varepsilon_0S}d + \frac{q_x}{\varepsilon_0S}d = 0,$$

откуда

$$q_x = \frac{q}{3}.$$

Систему пластин можно рассматривать как три конденсатора с зарядами $q/3$, $2q/3$, $q/3$ и емкостью $C = \varepsilon_0S/d$ каждый. Тогда конечная суммарная энергия трех конденсаторов есть $W = q^2/(3C)$, а начальная энергия (одного конденсатора, образованного внутренними пластинами) была $W_0 = q^2/(2C)$. Разница энергий и выделится в виде тепла:

$$Q = W_0 - W = \frac{q^2}{6C} = \frac{q^2d}{6\varepsilon_0S}.$$

4. Пусть высота полотнища над землей h ($h \sim 1$ м). На этом расстоянии должна «погаситься» энергия падения с высоты H. Средняя тормозящая сила при этом должна быть $F \sim mgH/h$. Спасатели могут натягивать брезент с силой $f \approx (1-0{,}5)mg$. В работу вносит вклад только вертикальная составляющая силы, среднее значение которой $f_{\text{ср}} \sim Nfh/(2R)$, где R – радиус полотнища, $N \sim 2\pi R/d$ – максимальное число спасателей, $d \approx 0{,}5$ м – минимальное расстояние между спасателями. Из соотношения $F \sim mgH/h \sim$ $\sim Nfh/(2R)$ находим $H \sim \pi h^2/d \sim (5 - 8)$ м (это 2-й, 3-й этажи).
5. При нижнем положении груза упругая сила и составляющая силы тяжести вдоль его траектории направлены в одну сторону, что увеличивает возвращающую силу. При верхнем положении силы направлены в противоположные стороны, что уменьшает возвращающую силу при тех же отклонениях, а значит, увеличивает период.

Вариант 2

1. $a = g\cos(\alpha+\beta)/\sin\beta$.
2. Пусть h – высота подъема жидкости в трубке, x – высота, на которую опустится поршень. Из условия равновесия поршня $mg = \rho gh(S-S_0)$, из закона сохранения массы жидкости $hS_0 = x(S-S_0)$ и из закона сохранения энергии получаем

$$Q = mgx - \rho gS_0\frac{h^2}{2} = \frac{m^2gS_0}{2\rho(S-S_0)^2}.$$

3. На перемычку действует сила Ампера. Запишем второй закон Ньютона для перемычки:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = IBh,\ \text{или}\ m\Delta v = I\Delta tBh = \Delta qBh.$$

Просуммируем последнее уравнение до момента пересечения перемычкой плоскости MN:

$$m(v_1 - v_2) = qBh,$$

где q – заряд на конденсаторе к моменту выхода перемычки из магнитного поля. Магнитный поток после выхода не меняется, поэтому ЭДС индукции с этого момента остается нулевой. По закону Ома,

$$RI_x = \frac{q}{C},$$

откуда находим

$$I_x = \frac{q}{RC} = \frac{m(v_1-v_2)}{RCBh}.$$

4. Показания весов расходятся из-за различия выталкивающих сил воздуха при различных температурах. Пусть $V = M/\rho = 0{,}05$ м^3 – объем тонны золота. $T_1 \approx 300$ К – июльская температура, $T_2 \approx 240$ К – зимняя температура, $p \approx 10^5$ Па – атмосферное давление, $\mathrm{M} \approx 29\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха, $R \approx 8{,}3$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная. Из уравнения Менделеева–Клапейрона находим массу вытесненного золотом воздуха:

$$m = \frac{\mathrm{M}pV}{RT},$$

а затем и разницу сил Архимеда:

$$F_2 - F_1 = (m_2 - m_1)g = \frac{\mathrm{M}pVg}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_2}\right) \approx 0{,}15\ \text{Н}.$$

Разнице показаний весов соответствует кажущееся расхождение по массе в 15 г.
5. На участок цепочки, лежащий внутри неподвижной трубки, вдоль оси трубки действуют составляющая силы тяжести, силы тяги, приложенные к обоим концам, и сила трения, компенсирующая силу, направленную к концу трубки. При вращении трубки вектор силы трения поворачивается, и появляется составляющая, перпендикулярная оси трубки. Величина силы трения не меняется, так как неизменна сила нормального давления, поэтому уменьшается составляющая силы трения, удерживающая цепочку от движения. В результате цепочка выскальзывает из трубки.

Вариант 3

1. $F = L/3$.
2. Обозначим положительный заряд «гантельки» q, ее длину d, массу m, напряженность поля конденсатора E, искомую скорость «гантельки» v_x. Запишем закон сохранения энергии для двух указанных случаев:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + Eqd,\ \frac{mu^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} - Eqd.$$

Отсюда

$$v_x = \sqrt{2u^2 - v^2}.$$

3. Так как доска не вращается, нормальные силы реакции валиков одинаковы. Допустим, что ситуация критическая и сила трения максимально возможная, т.е. $F = \mu Mg\cos\alpha$, и запишем для доски второй закон Ньютона:

$$Ma = Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha.$$

Пусть доска сместилась на малое расстояние x, приобретя при этом скорость v. При отсутствии проскальзывания линейная скорость ободов валиков также равняется v. Закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{2mv^2}{2} = Mgx\sin\alpha.$$

При малом смещении ускорение можно считать постоянным и использовать кинематическую связь $v^2 = 2ax$. Из последнего соотношения с учетом двух предыдущих уравнений имеем

$$\mu = \frac{2m}{M+2m}\operatorname{tg}\alpha.$$

4. Массу кислорода в атмосфере можно оценить, зная атмосферное давление $p_а \approx 10^5$ Па (кислорода в атмосфере по массе 20%): $M_{атм} \approx 0{,}2p_аS_{Зем}/g$, а массу кислорода в океане – зная среднюю глубину океана $H \sim 4\cdot10^3$ м (отношение молярных масс кислорода и воды 16/18): $M_{ок} \approx \rho HS_{ок}\cdot16/18$. Отношение площадей поверхности океанов к поверхности Земли $S_{ок}/S_{Зем} \approx 0{,}7$. Таким образом,

$$\frac{M_{ок}}{M_{атм}} \approx \frac{40}{9}\frac{\rho gH}{p_a}\frac{S_{ок}}{S_{Зем}} \approx 1200.$$

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2n}\right)\cup\left(-\sqrt{2n}; \sqrt{2n}\right)\cup\left(\sqrt{2n}; +\infty\right)$;

б) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x \in (-\infty; -2), \\ \frac{1}{2-x}, & x \in (-2; 2), \\ \frac{1}{x-2}, & x \in (2; +\infty), \end{cases}$

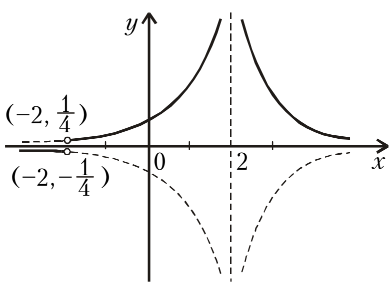

Рис. 11

(рис.11);

в) $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{7}$.

2. $x \in \left(-1; \log_3 25\right]\cup(3; +\infty)$.

3. $x_1 = 2/5$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 4/5$, $x_4 = 1$.

4. 20. **5.** $S_{бок} = \dfrac{d^2\operatorname{ctg}\alpha/2}{2\cos\beta}$, $V = \dfrac{d^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Вариант 2

1. а) $x \in (-\infty; -n]\cup[1; 3]$;

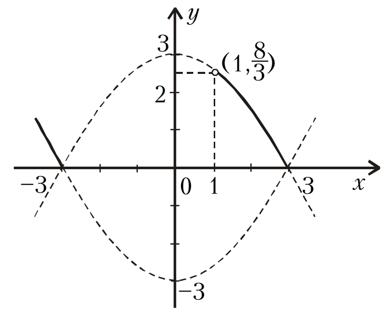

Рис.1 2

б) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(x^2-9\right), & x \in (-\infty; -3], \\ \frac{1}{3}\left(9-x^2\right), & x \in (1; 3]; \end{cases}$

(рис.12);

в) $a \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

2. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$. **3.** $x_1 = \frac{5\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7\pi}{4}$. **4.** $\frac{R^2}{6}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$.

5. $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{36\cos\alpha}$.

Российский государственный технологический университет им.К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 1. **2.** Возрастает при $x < -5$ и $x > -3$, убывает при $-5 < x < -4$ и $-4 < x < -3$. **3.** $5 < x \le 8$.

4. $x = \dfrac{(-1)^n\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{\pi k}{2}$, $y = \dfrac{(-1)^n\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} - \dfrac{\pi k}{2}$, $n, k \in \mathbf{Z}$.

5. 6 кг, 40%. **6.** 9 : 2.

Вариант 2

1. $\pm\sqrt{2}$.

2. $x = -\frac{1}{3}$ – точка минимума, $x = 1$ – точка максимума.

3. $3 < x < 4$, $x \ge 5$.

4. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{3} - \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **5.** 14. **6.** 1 : 7.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $x_m = 0{,}4$ см. **2.** $\lambda_2 = 4\cdot10^{-7}$ м. **3.** $k = 1{,}56$.
4. $A = 670$ Дж. **5.** $F_н = 8{,}7\cdot10^{-3}$ Н. **6.** $U = 220$ В.

Вариант 2

1. $p = 5\cdot10^{-25}$ кг·м/с. **2.** $\Delta U = 600$ Дж.

3. $W_м = 0{,}4\cdot10^{-4}$ Дж, $W_э = 1{,}2\cdot10^{-4}$ Дж.

4. $\beta = 45°$. **5.** $q_1/q_2 = 8$.

6. Уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,8. **2.** 8. **3.** 144. **4.** –2. **5.** 1. **6.** 2. **7.** 3. **8.** 143. **9.** 15. **10.** 18. **11.** 0,4. **12.** 5,4.

Вариант 2

1. 4,1. **2.** −8. **3.** 0,3. **4.** −18. **5.** 7. **6.** −0,5. **7.** −1. **8.** −10. **9.** 2,9. **10.** 0,4. **11.** 30,72. **12.** 8.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 105 Н. **2.** 100 с. **3.** 12 Дж. **4.** 6 $м/с^2$.
5. 127 Дж. **6.** 33 кДж. **7.** 801 $с^{-1}$.
8. 3. **9.** 2 м. **10.** 4 мм. **11.** 3 м/с. **12.** 80 см.

Вариант 2

1. 20 м. **2.** 14 кг · м/с. **3.** 7 м/с.
4. 140 кг. **5.** 4. **6.** 16. **7.** 12 мм. **8.** 9 см.
9. 6 с. **10.** 200 кПа. **11.** 8 Вт. **12.** 2 Тл.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{4}{a-4}$. **2.** 1. **3.** 8. **4.** $\frac{3}{4}$. **5.** $-\frac{1}{2}$. **6.** 9. **7.** 1. **8.** $-\sqrt{3}$. **9.** $\frac{\pi}{2}$.

10. $(-\infty;-1)\cup(-1;1)$. **11.** $(-2;\ 1]$. **12.** $[-2;-1)\cup(1;+\infty)$.

13. $(1;\ 3]$. **14.** $\frac{n\pi}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

15. Четыре вектора: (−3; −3); (−1; 1); (1; −1); (3; 3).

16. $\left\{-1;\ \frac{1}{3}\right\}$. **17.** 3. **18.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **19.** 20 или 80. **20.** 4.

Вариант 2

1. −2. **2.** 12. **3.** 20%. **4.** 2. **5.** 1. **6.** −2. **7.** {1; 3}. **8.** {1; 16}.

9. −3. **10.** −1. **11.** πn, $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **12.** $(-2;1)\cup(1;-2)$.

13. $\sqrt{2}$. **14.** $[-3;-1)\cup\{0\}$. **15.** (−2; 0), (−1; 1). **16.** $\left[-1;\ \frac{1}{3}\right]$.
17. (0; 4]. **18.** {−1; 2}. **19.** 3. **20.** $-1\le p\le 0$.

XL Международная математическая олимпиада

1. Обозначим через r_{PQ} отражение относительно прямой, проходящей перпендикулярно отрезку PQ через его середину, через G – центр тяжести S. Поскольку $r_{AB}(S)=S$, то $r_{AB}(G)=G$ для любых $A,B\in S$, а значит, все точки множества S равноудалены от G. Отсюда видно, что S лежит на некоторой окружности. Точки S задают выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Отражение относительно серединного перпендикуляра отрезка A_1A_3 переводит каждую полуплоскость, ограниченную A_1A_3, в себя, следовательно, образом точки A_2 может быть только она сама: $r_{A_1A_3}(A_2)=A_2$; отсюда $A_1A_2=A_2A_3$. Аналогично, $A_2A_3=A_3A_4=\ldots=A_nA_1$. А так как точки A_1, A_2, …, A_n лежат на окружности, то многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный.

2. Неравенство симметрично и однородно, поэтому можно считать, что $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n\ge 0$ и $\sum_i x_i=1$. Положим

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i<j}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right).$$

Мы попробуем увеличить значение F, заменяя

$$x=(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},0,\ldots,0)$$

на

$$x'=(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+x_{k+1},0,\ldots,0)$$

(здесь x_{k+1} – последнее ненулевое число набора, $k\ge 2$):

$$F(x')-F(x)=x_kx_{k+1}\left(3(x_k+x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1}x_i-x_k^2-x_{k+1}^2\right)=$$

$$=x_kx_{k+1}\left(3(x_k+x_{k+1})(1-x_k-x_{k+1})-x_k^2-x_{k+1}^2\right)=$$

$$=x_kx_{k+1}\left((x_k+x_{k+1})\left(3-4(x_k+x_{k+1})\right)+2x_kx_{k+1}\right).$$

Так как

$$1\ge x_1+x_k+x_{k+1}\ge\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})+x_k+x_{k+1},$$

то

$$3/4>2/3\ge x_k+x_{k+1},$$

следовательно,

$$F(x')-F(x)>0.$$

Повторив указанную выше замену несколько раз, получим

$$F(x)\le F(a,b,0,\ldots,0)=$$

$$=ab\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{2}(2ab)(1-2ab)\le\frac{1}{8}=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right).$$

Значит, $C=1/8$. Равенство выполнено тогда и только тогда, когда два числа набора x_1, …, x_n равны между собой, а остальные числа равны нулю.

4. При $n=1$ в качестве p можно взять любое простое число. Если n четно, то четно и p; значит, $p=2$, $n=2$.

Пусть n – нечетное число, большее 1; обозначим через q наименьший простой делитель n. Очевидно, $p\ge 3$, $q\ge 3$. Имеем:

$$(p-1)^{2n}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q),\ (p-1)^{q-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$$

(по малой теореме Ферма). Обозначим через y наименьшее натуральное число такое, что $(p-1)^y\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)$. Легко видеть, что y делит числа $2n$ и $q-1$. Но $\text{НОД}(n,q-1)=1$; следовательно, $y=1$ или $y=2$.

Значит, $(p-1)^n+1\equiv 2(\mathrm{mod}\ q)$ либо $(p-1)^n+1\equiv p(\mathrm{mod}\ q)$. В первом случае было бы $q=2$. Во втором случае $q=p$.

Пусть $n>q$. Вследствие выбора q имеем $\sqrt{n}\ge q$, $2q\ge q^2$, т.е. $q=2$.

Пусть $n=q$. В этом случае p^{p-1} делит число

$$(p-1)^p+1=p^2\left(p^{p-2}-C_p^1p^{p-3}+\ldots+C_p^{p-3}p-C_p^{p-2}+1\right),$$

откуда, поскольку все выражения в скобках, кроме одного, делятся на p, получаем $p-1\le 2$. Значит, осталось только $p=3$ и $n=3$.

Окончательно, решениями являются пары (2, 2), (3, 3) и (1, p), где p – произвольное простое число.

XXX Международная олимпиада школьников по физике

Задача 1. 1) T = 322 К = 49 °С, p = 102,32 кПа; 2) A = 24,1 Дж; 3) W= 84 Дж; 4) P = 8,4 Вт, $n=2{,}2\cdot10^{19}\ с^{-1}$; 5) $\delta=2{,}8\cdot10^{-3}\approx 0{,}3\%$; 6) $p'=p_0$, T' = 321 К = 48 °С.

Задача 2. 1) Магнитная индукция перпендикулярна плоскости рисунка 1 из статьи и направлена на читателя; 2) $k=i\mu_0/(2\pi d)$; 3) магнитная индукция в точке P^* равна $B(P^*)=k\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)$ и направлена противоположно индукции в точке P; 4) $T=2\pi\sqrt{I/(\mu B)}$; 5) $0<\alpha<44°$.

Задача 3. 1) $V\approx 1{,}306\cdot10^4$ м/с; 2) $\rho=2{,}333\cdot10^{10}$ м; 3) $\varphi\approx 37{,}4°$, $v'=1{,}65\cdot10^4$ м/с; 4) E = 112 ГДж;

5) $\Delta\theta=\pi-2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+v'^4b^2/\left(G^2M^2\right)}}$;

6) $b_{\min}=4{,}90\cdot10^8$ м, $\Delta\theta_{\max}\approx 87{,}4°$;

7) $v'' = \sqrt{v_0\left(v_0 + 2V\sin\Delta\theta\right) + 2V^2\left(1 - \cos\Delta\theta\right)}$;

8) $v'' = 2{,}62 \cdot 10^4$ м/с.

VI Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Теоретический тур

8 класс

1. Селенографическая широта должна быть больше 90° − − 1,5° = 88,5°.

2. Чем дальше от полюса мира, тем более длинные дуги оставляют звезды (так как больше их угловая – относительно наблюдателя – скорость перемещения по небу), следовательно, их свет «размазывается» на большую площадь, что и приводит к уменьшению яркости дуг.

3. Вид ночного неба практически такой же, как и на Земле, однако Юпитер и Сатурн стали заметно ярче, а вот блеск Венеры и Меркурия ослаб в несколько раз. Видны также яркая Земля и ее спутник Луна. Быстро движутся два спутника Марса: Фобос и Деймос; при этом интересно, что Фобос восходит на западе, заходит на востоке, а за ночь может дважды пересечь небосвод. День на Марсе существенно отличается от земного. Диаметр солнечного диска в полтора раза меньше «нашего». Из-за разреженности атмосферы небо днем довольно темное, и на нем хорошо видны спутники Марса, планеты и даже некоторые звезды.

4. Телескоп увеличивает поток света от звезды, попадаемый в глаз наблюдателя, пропорционально отношению площадей объектива и выходного зрачка окуляра. При этом звезда по-прежнему является для наблюдателя точечным объектом – просто ее звездная величина существенно уменьшается. Что же касается яркости неба, то она не увеличивается, а, как правило, наоборот, уменьшается – в этом легко убедиться, взглянув днем на небо в телескоп. Причина в том, что телескоп увеличивает не только поток света от яркого неба, но и угловой размер того кусочка неба, который виден в окуляр, как бы «размазывая» его свет на большую площадь. При этом яркость неба, видимого в окуляр, остается неизменной при нормальном (равнозрачковом) увеличении (или меньшем), а при увеличении больше нормального (которое, как правило, и используется при наблюдениях) вообще выглядит менее ярким, чем невооруженным глазом. Таким образом, в окуляр мы видим существенно более яркие звезды на фоне либо такого же, либо существенно потемневшего неба.

5. В 17 часов 39 минут.

6. Дело во влиянии атмосферы на качество изображения. Неоднородности воздуха создают непрерывно появляющиеся и исчезающие «воздушные линзы», немного отклоняющие свет; размер этих «линз» составляет десятки сантиметров. Диаметр объективов маленьких телескопов обычно меньше размеров «воздушных линз», поэтому при перемещении неоднородностей изображение дрожит, но остается резким. В большой телескоп попадает свет, прошедший сразу через несколько «линз», каждая из которых отклоняет лучи случайным образом. Поэтому изображение не дрожит, а становится размытым, и мелкие детали на поверхности планет оказываются неразличимыми.

9 класс

5. Через $t \approx 4{,}5 \cdot 10^9$ с ≈ 140 лет.

6. Вариантов может быть много (в зависимости от фантазии отвечающего), но все они сводятся к использованию второго закона Ньютона.

10 класс

1. Близко ко дню зимнего солнцестояния, т.е. в конце декабря.

2. Цвет звезды зависит от распределения энергии в ее видимом спектре. Если ученый не ошибся и по спектральным линиям поглощения звезда имеет спектральный класс A0, то это могло произойти в одном случае – если излучение звезды испытало сильное межзвездное поглощение. Как известно, слой межзвездной пыли сильнее поглощает коротковолновое излучение, чем длинноволновое (как и при рассеянии света в земной атмосфере). Поскольку пыль сосредоточена в тонком слое в диске Галактики, звезда должна находиться в полосе Млечного Пути.

3. S = 21 ч 42 мин 24 с.

4. Правильным является ответ 4).

5. Через $t \approx 4{,}5 \cdot 10^9$ с ≈ 140 лет.

6. Здесь нужно рассмотреть два аспекта: 1) достаточно ли яркая Луна, чтобы быть видимой с Марса; 2) достаточно ли угловое расстояние между Землей и Луной, чтобы для невооруженного глаза они не сливались в один светящийся объект. Обсудим их по отдельности.

1) Расстояние от Луны до Марса меняется от 0,52 а.е. до 2,52 а.е. и в среднем составляет 1,52 а.е. При этом, если бы Луна наблюдалась с Марса в свое полнолуние, ее звездная величина была бы равна

$$m \approx -12{,}8^m + 5\lg\left(1{,}52 \cdot 150000/384\right) \approx -12{,}8^m + 13{,}9^m \approx +1{,}1^m.$$

При наибольшем удалении Луны от Марса аналогично получаем $m \approx +2{,}2^m$. Таким образом, хотя Луна на Марсе в темное время суток не может наблюдаться в полнолуние, имеется достаточный запас яркости для того, чтобы она была хорошо видна невооруженным глазом в других конфигурациях.

2) Угловое расстояние между Луной и Землей достаточно велико – даже в случае наибольшего удаления Земли от Марса оно составит $\arcsin\left((384/150000)/2{,}52\right)$, что соответствует примерно 3,5 угловым минутам. Так что система будет вполне разрешаема глазом.

Таким образом, Луну на Марсе не просто можно увидеть, скорее ее сложно не заметить.

11 класс

1. Ширина полосы по оси звездных величин составляет $2{,}5\lg 2 \approx 0{,}75^m$.

3. а) $R_п = R_0$; $R_а \approx 35700$ км; б) $V_а \approx 4{,}2$ км/с; в) $M \approx 2{,}16 \cdot 10^{25}$ кг.

5. $\alpha \approx 22{,}5^\circ$. **6.** $m \approx 1{,}6^m$ (см. задачу 6 для 10 кл.).

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. 20. *Указание*. Докажите, что имеется 40 необычных пассажиров.

2. 110. *Указание*. Можно перекрасить все клетки, за исключением клеток главной диагонали, если каждый раз перекрашивать две белые клетки, симметричные относительно главной диагонали.

3. Любой кусок при подходящем n заключен между $12 \cdot 10^n$ и $13 \cdot 10^n$. Поэтому произведение двух кусков заключено между числами вида $144 \cdot 10^m$ и $169 \cdot 10^m$, откуда следует, что вторая цифра произведения двух кусков равна 4, 5 или 6.

4. а) Если циссильванец не входит в тройку жителей, указавших друг на друга, то он не вампир. Число 1999 не кратно трем.

б) Рассортируем письма на пачки, собрав вместе письма, где указаны одни и те же сотрудники, и рассмотрим пачки, в которых количество писем не кратно 200. Все эти письма от сумасшедших, поскольку письма здоровых сотрудников лежат в одной отдельной пачке. Поскольку общее количество писем в выбранных пачках дает остаток 199 при делении на 200, в них содержится не менее 199 писем.

5. Нельзя. Предположим, что числа разбиты на группы в соответствии с условием. Будем называть число *большим*, если оно является одним из двух наибольших чисел в своей группе, и *маленьким*, если не является. В каждой группе сумма двух наибольших чисел не превосходит 1999 + 1998= = 3997, поэтому сумма остальных (маленьких) чисел группы не превосходит 3997/9 < 445. Следовательно, маленькие числа не превосходят 444. Так как в каждой группе есть хотя бы одно маленькое число, разбиение состоит не более чем из 444 групп. Значит, количество больших чисел не превосходит 888 и всего больших и маленьких чисел не более 888 + 444, что меньше 1999. Противоречие.

6. Предположим, что такие x и y существуют. Возведем обе части равенства в куб:

$$p = x + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{y} + y = x + y + 3\sqrt[3]{xy}\cdot\sqrt[3]{p}\,.$$

Отсюда легко получить, что pxy – куб натурального числа. Следовательно, хотя бы одно из чисел x, y кратно p, но $x < p$ и $y < p$.

7. Для любых островитян A и B рассмотрим *кратчайшую* цепочку переводчиков, с помощью которой они могут общаться между собой. Предположим, что в цепочке 16 или более переводчиков. Добавим A в начало, B – в конец; получится цепочка не менее чем из 18 человек. Заметим, что 1-й, 3-й, 5-й, …, 13-й и 15-й человек в цепочке говорят на разных языках (иначе цепочку можно было бы сократить), поэтому вместе они знают по крайней мере $8 \cdot 5 = 40$ различных языков. Эти языки неизвестны 17-му и 18-му, поэтому на долю этих двоих остается не более пяти языков. Значит, 17-й и 18-й знают одни и те же пять языков. Это противоречит тому, что цепочка – кратчайшая.

8. Они пересекаются в середине стороны AC.

9. Пусть $a + b + c + d = p$ – простое число. Так как $(a+b)^2 - ab = (c+d)^2 - cd$, то

$$ab - cd = (a+b)^2 - (c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d).$$

Следовательно,

$$(a+c)(b+c) = ab + ac + cb + c^2 \equiv cd + ac + cb + c^2 = pc \equiv 0 \pmod p,$$

произведение $(a+c)(b+c)$ кратно p. Но оба множителя $a + c$ и $b + c$ больше 1 и меньше p.

10. Если у прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата $ABCD$, одна из вершин совпадает с B, а противоположная вершина лежит на диагонали AC, то периметр прямоугольника равен $2a$, где a – длина стороны квадрата.

Рассмотрим прямоугольник разбиения, содержащий вершину B. Поскольку его можно уменьшить до прямоугольника, вершина которого лежит на диагонали AC, то периметр рассматриваемого прямоугольника больше $2a$. Осталось заметить, что любой прямоугольник с периметром больше $2a$ пересечен диагональю BD.

11. Наибольший общий делитель d любых двух соседних членов последовательности равен наибольшему общему делителю первых двух ее членов. Продолжая написанную на доске последовательность, мы будем брать разность до тех пор, пока в последовательности дважды подряд не появится число d. Таким же образом мы продолжим последовательность влево (т.е. в направлении убывания номеров, добавляемым членам будем присваивать нулевой и отрицательные номера) до тех пор, пока в ней тоже не появится два раза подряд число d. Повторив фрагмент «от левых двух d до правых двух d», мы повторим в том числе и начальный фрагмент последовательности.

12. *Указание.* Каждая диагональ шестиугольника лежит в плоскости, проходящей через два противоположных ребра куба.

13. Добавим «виртуальную» машину, которая начнет движение ровно через 2 минуты после первой. Поскольку состояния светофоров меняются с периодом 2 минуты, то каждый светофор виртуальная машина будет проезжать ровно через 2 минуты после первой и поэтому никогда не догонит первую машину. Вторая машина никогда не обгонит виртуальную машину, а потому не догонит и первую машину.

15. *Указание.* Докажите, что число a_k при четных k делится на 3, а при $k = 2^n(2m-1) - 1$, где n, m – натуральные числа, делится на $2^{2^n} + 1$.

16. Для всех n, являющихся степенями двойки.

21. 2525.

Московская олимпиада студентов по физике

1. $a = 2\omega v_0$. **2.** $v_{\text{ср}} = \sqrt{v_0^2 + \left(F/(m\omega)\right)^2}$.

3. $A = mgh + \dfrac{mv_0^2}{2}\left(\sqrt{\dfrac{l}{l-h}} - 1\right)$. **4.** $f = \sigma^2 R/(2\varepsilon_0)$.

5. $\varphi = Q/(6\pi\varepsilon_0 R)$. **6.** $I_{\text{ср}} = U_0/(4\omega L)$.

7. $I = 2I_0\left(w_2^2 + w_1^2\right)/\left(w_1 + w_2\right)^2$.

8. $\Delta S = -\dfrac{m}{\text{M}} C_V \ln\dfrac{T}{2^{\gamma-1}T_0}$. **9.** $Q = (m/\text{M})RT/2$.

10. $I_{\max} = I_0\left(\dfrac{1}{2} + \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$, $I_{\min} = I_0\left(\dfrac{1}{2} + \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
ГУП Чеховский полиграфический комбинат
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
142300, г.Чехов Московской области,
Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536
Заказ №

7) $v'' = \sqrt{v_0\left(v_0 + 2V\sin\Delta\theta\right) + 2V^2\left(1-\cos\Delta\theta\right)}$;

8) $v'' = 2{,}62\cdot10^4$ м/с.

VI Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Теоретический тур

8 класс

1. Селенографическая широта должна быть больше 90° – – 1,5° = 88,5°.

2. Чем дальше от полюса мира, тем более длинные дуги оставляют звезды (так как больше их угловая – относительно наблюдателя – скорость перемещения по небу), следовательно, их свет «размазывается» на большую площадь, что и приводит к уменьшению яркости дуг.

3. Вид ночного неба практически такой же, как и на Земле, однако Юпитер и Сатурн стали заметно ярче, а вот блеск Венеры и Меркурия ослаб в несколько раз. Видны также яркая Земля и ее спутник Луна. Быстро движутся два спутника Марса: Фобос и Деймос; при этом интересно, что Фобос восходит на западе, заходит на востоке, а за ночь может дважды пересечь небосвод. День на Марсе существенно отличается от земного. Диаметр солнечного диска в полтора раза меньше «нашего». Из-за разреженности атмосферы небо днем довольно темное, и на нем хорошо видны спутники Марса, планеты и даже некоторые звезды.

4. Телескоп увеличивает поток света от звезды, попадаемый в глаз наблюдателя, пропорционально отношению площадей объектива и выходного зрачка окуляра. При этом звезда по-прежнему является для наблюдателя точечным объектом – просто ее звездная величина существенно уменьшается. Что же касается яркости неба, то она не увеличивается, а, как правило, наоборот, уменьшается – в этом легко убедиться, взглянув днем на небо в телескоп. Причина в том, что телескоп увеличивает не только поток света от яркого неба, но и угловой размер того кусочка неба, который виден в окуляр, как бы «размазывая» его свет на большую площадь. При этом яркость неба, видимого в окуляр, остается неизменной при нормальном (равнозрачковом) увеличении (или меньшем), а при увеличении больше нормального (которое, как правило, и используется при наблюдениях) вообще выглядит менее ярким, чем невооруженным глазом. Таким образом, в окуляр мы видим существенно более яркие звезды на фоне либо такого же, либо существенно потемневшего неба.

5. В 17 часов 39 минут.

6. Дело во влиянии атмосферы на качество изображения. Неоднородности воздуха создают непрерывно появляющиеся и исчезающие «воздушные линзы», немного отклоняющие свет; размер этих «линз» составляет десятки сантиметров. Диаметр объективов маленьких телескопов обычно меньше размеров «воздушных линз», поэтому при перемещении неоднородностей изображение дрожит, но остается резким. В большой телескоп попадает свет, прошедший сразу через несколько «линз», каждая из которых отклоняет лучи случайным образом. Поэтому изображение не дрожит, а становится размытым, и мелкие детали на поверхности планет оказываются неразличимыми.

9 класс

5. Через $t \approx 4{,}5\cdot10^9$ с ≈ 140 лет.

6. Вариантов может быть много (в зависимости от фантазии отвечающего), но все они сводятся к использованию второго закона Ньютона.

10 класс

1. Близко ко дню зимнего солнцестояния, т.е. в конце декабря.

2. Цвет звезды зависит от распределения энергии в ее видимом спектре. Если ученый не ошибся и по спектральным линиям поглощения звезда имеет спектральный класс A0, то это могло произойти в одном случае – если излучение звезды испытало сильное межзвездное поглощение. Как известно, слой межзвездной пыли сильнее поглощает коротковолновое излучение, чем длинноволновое (как и при рассеянии света в земной атмосфере). Поскольку пыль сосредоточена в тонком слое в диске Галактики, звезда должна находиться в полосе Млечного Пути.

3. S = 21 ч 42 мин 24 с.

4. Правильным является ответ 4).

5. Через $t \approx 4{,}5\cdot10^9$ с ≈ 140 лет.

6. Здесь нужно рассмотреть два аспекта: 1) достаточно ли яркая Луна, чтобы быть видимой с Марса; 2) достаточно ли угловое расстояние между Землей и Луной, чтобы для невооруженного глаза они не сливались в один светящийся объект. Обсудим их по отдельности.

1) Расстояние от Луны до Марса меняется от 0,52 а.е. до 2,52 а.е. и в среднем составляет 1,52 а.е. При этом, если бы Луна наблюдалась с Марса в свое полнолуние, ее звездная величина была бы равна

$$m \approx -12{,}8^m + 5\lg\left(1{,}52\cdot150000/384\right) \approx -12{,}8^m + 13{,}9^m \approx +1{,}1^m.$$

При наибольшем удалении Луны от Марса аналогично получаем $m \approx +2{,}2^m$. Таким образом, хотя Луна на Марсе в темное время суток не может наблюдаться в полнолуние, имеется достаточный запас яркости для того, чтобы она была хорошо видна невооруженным глазом в других конфигурациях.

2) Угловое расстояние между Луной и Землей достаточно велико – даже в случае наибольшего удаления Земли от Марса оно составит $\arcsin\left(\left(384/150000\right)/2{,}52\right)$, что соответствует примерно 3,5 угловым минутам. Так что система будет вполне разрешаема глазом.

Таким образом, Луну на Марсе не просто можно увидеть, скорее ее сложно не заметить.

11 класс

1. Ширина полосы по оси звездных величин составляет $2{,}5\lg2 \approx 0{,}75^m$.

3. а) $R_п = R_0$; $R_а \approx 35700$ км; б) $V_а \approx 4{,}2$ км/с; в) $M \approx 2{,}16\cdot10^{25}$ кг.

5. $\alpha \approx 22{,}5^\circ$. **6.** $m \approx 1{,}6^m$ (см. задачу 6 для 10 кл.).

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. 20. *Указание*. Докажите, что имеется 40 необычных пассажиров.

2. 110. *Указание*. Можно перекрасить все клетки, за исключением клеток главной диагонали, если каждый раз перекрашивать две белые клетки, симметричные относительно главной диагонали.

3. Любой кусок при подходящем n заключен между $12\cdot10^n$ и $13\cdot10^n$. Поэтому произведение двух кусков заключено между числами вида $144\cdot10^m$ и $169\cdot10^m$, откуда следует, что вторая цифра произведения двух кусков равна 4, 5 или 6.

4. а) Если циссильванец не входит в тройку жителей, указавших друг на друга, то он не вампир. Число 1999 не кратно трем.

б) Рассортируем письма на пачки, собрав вместе письма, где указаны одни и те же сотрудники, и рассмотрим пачки, в которых количество писем не кратно 200. Все эти письма от сумасшедших, поскольку письма здоровых сотрудников лежат в одной отдельной пачке. Поскольку общее количество писем в выбранных пачках дает остаток 199 при делении на 200, в них содержится не менее 199 писем.

5. Нельзя. Предположим, что числа разбиты на группы в соответствии с условием. Будем называть число *большим*, если оно является одним из двух наибольших чисел в своей груп-