

Материалы вступительных экзаменов 1999 года

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

1. Для всех возможных значений параметров a и b решите уравнение

$$\sqrt{\log_a(ax) + \log_x(ax)} + \sqrt{\log_a(x/a) + \log_x(a/x)} = b.$$

2. Определите значения α , удовлетворяющие неравенству

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + p \cos^2 \alpha \geq 1$$

для всех значений $p \in \mathbf{R}$.

3. На координатной плоскости заданы прямые $y = 6x + 7$ и $y = -8x - 14$. Каждая из двух парабол вида $y = \pm x^2 + ax + b$ касается обеих этих прямых. Определите уравнения этих парабол. Найдите площадь S фигуры, границей которой являются указанные выше прямые и параболы.

4. Определите наименьшее и наибольшее значения выражения

$$x + y - |x - y|$$

при условии, что $x^2 - xy + y^2 = 4$. При каких x и y достигаются эти значения?

5. Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность. Через его вершины проведены касательные к этой окружности, образующие также вписанный четырехугольник. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$, если его периметр равен p , и $MN/ML = 2$, $MN/KL = 8$.

6. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите радиус шара.

7. Не пользуясь калькулятором, определите значение выражения

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

1. Два одинаковых клина с массами M и углами раствора α помещены в угол, образованный гладкими полом и

стенкой, как показано на рисунке 1. Коэффициент трения между соприка-

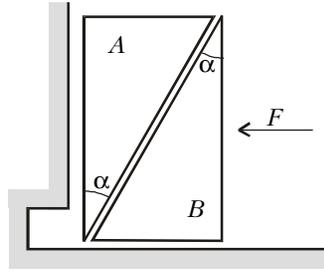


Рис. 1

сающимися плоскостями клиньев μ . 1) Каким должен быть этот коэффициент, чтобы клин A мог быть выдвинут вверх горизонтальной силой F , приложенной к клину B ? 2) Какой должна быть эта сила при заданном μ ? В стене вблизи пола сделана выемка для того, чтобы клин B мог быть продвинут в горизонтальном направлении.

2. Идеальный газ состоит из молекул азота, часть из которых диссоциирована на атомы. В процессе изобарического нагрева абсолютная температура этого газа возрастает от T_1 до T_2 , при этом газ совершает работу A . Какое количество теплоты было подведено к газу, если известно, что степень диссоциации газа (доля диссоциированных молекул) возрастает от α_1 до α_2 , а энергия диссоциации одной молекулы равна ϵ ? Число степеней свободы молекулы азота (с учетом колебаний) считать равным 7.

3. Тонкая трубка квадратной формы, заполненная жидкостью ровно наполовину, может свободно вращать-

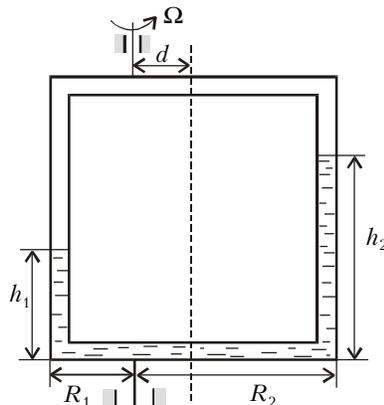


Рис. 2

ся вокруг вертикальной оси, смещенной на некоторое расстояние относительно оси симметрии (рис.2). При вращении рамки с частотой Ω высоты столбов жидкости различаются в два раза. 1) Во сколько раз нужно увеличить частоту вращения, чтобы жидкость заполнила дальнее колено полностью? 2) Во сколько раз нужно увеличить смещение оси, чтобы заполнить то же условие без изменения частоты вращения рамки?

4. В однородном магнитном поле с индукцией B находятся длинные вертикальные проводящие рейки, расположенные в плоскости, перпендикулярной линиям поля. По рейкам, расстояние между которыми l , может скользить без трения проводник массой m (рис.3). Верхние концы реек замкнуты на катушку индуктивнос-

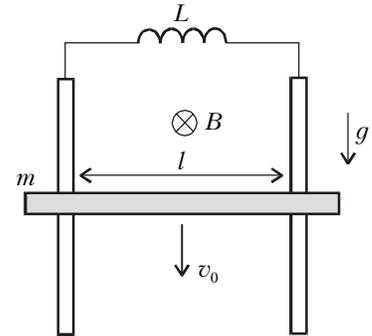


Рис. 3

тью L , а нижние концы разомкнуты. 1) Определите расстояние, на которое переместится первоначально покоящийся проводник, если его мгновенно разогнать вниз до скорости v_0 . 2) Найдите максимальную скорость проводника и ток в катушке в этот момент. Сопротивление проводников и самоиндукцию цепи не учитывать.

5. Точечный источник света S распо-

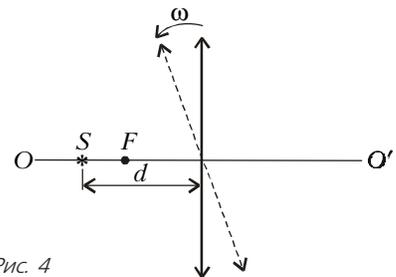


Рис. 4

ложен на расстоянии d от собирающей линзы на ее главной оптической оси OO' . Фокусное расстояние линзы $F < d$. В некоторый момент времени линза начинает вращаться с постоянной угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через центр линзы и перпендикулярной OO' (рис.4). Найдите ускорение, которое приобретает изображение источника сразу после начала вращения линзы.

Публикацию подготовил С.Фомичев

Институт криптографии, связи
и информатики
Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет прикладной математики)

1. Найдите все действительные корни алгебраического уравнения

$$(3x + 5) \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 (3x + 7) = \frac{1}{3}.$$

2. В течение двух лет добыча нефти на скважине уменьшается ежегодно на один и тот же процент в сравнении с объемом добычи предыдущего года. За первый год она сократилась более чем вдвое, а падение добычи за второй год в 7,2 раза меньше исходного годового объема добычи. На сколько процентов ежегодно сокращалось производство нефти на скважине?

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$5 + 2 \sin x + 8 \cos x + \sin 2x + 3 \cos 2x = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 8) + 2\sqrt{\log_2(x^2 - 2x + 8)} \geq 12.$$

5. На стороне AM треугольника AMD выбрана точка B , а на стороне MD выбрана точка C так, что точки A , B , C и D лежат на одной окружности, а прямые AD и BC пересекаются в точке N . При этом известно, что $\angle AMD = 60^\circ$, $AD = 2BC$, $S_{ABD} = 2S_{ACD}$. Найдите величину угла $\angle ANB$.

Вариант 2

(факультет информационной безопасности)

1. Найдите все действительные корни алгебраического уравнения

$$(10x - 5)^2(10x - 4)(10x - 6) = 72.$$

2. В течение первых двух лет обучения одного набора слушателей в Академии процент отчисляемых на первом и втором курсах был одинаковым. Число слушателей, переведенных на третий курс, отличается от числа слушателей, переведенных на второй курс, на 20 человек. Всего на первый курс данного набора было принято 441 человек. Сколько слушателей переведено на третий курс, если известно, что их было более 100 человек?

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x = \cos x + \cos 2x.$$

4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, $CD = 12$, а отрезок AO , где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите $\angle AOB$.

5. Считая x , y целыми числами, решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_4(\sqrt{y} + 1) \log_{(y-2)^2}(x+1) + \\ + \log_{(y-2)^2} 3 = 0, \\ 4^{x+y} - 256 \cdot 2^{x+y} + 16384 = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

(факультет специальной техники)

1. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготавливают творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получится из одной тонны молока?

2. Решите неравенство

$$\lg x^{\sqrt{x-1}} + 1 > \lg x + \sqrt{x-1}.$$

3. В трапеции $CDEF$ ($CF \parallel DE$) диагонали DF и CE перпендикулярны и пересекаются в точке B . Известно, что $CD = 37$, $BF = 84$, а радиус окружности, вписанной в треугольник BFC , равен 14. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник DEB .

4. Решите уравнение

$$\sin(\pi x) = \cos \frac{\pi}{x}.$$

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$144^{-|2x-1|} - 2 \cdot 12^{-|2x-1|} + 12a = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет специальной техники)

1. Тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту.

Найдите кинетическую энергию тела E_k спустя время t после начала движения. Массу тела m . Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. По наклонной поверхности клина массой M с углом наклона α втаскивают брусок массой m , действуя на него силой, параллельной поверхности клина (рис.1). Клин находится на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между бруском и клином μ_1 . Определите, при каких значениях

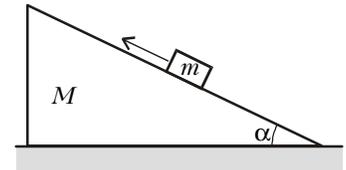


Рис. 1

коэффициента трения μ_2 между клином и горизонтальной плоскостью клин будет оставаться в покое. Массу бруска меньше массы клина.

3. Двум удаленным друг от друга металлическим шарам с радиусами R_1 и R_2 , соединенным длинным тонким проводником, сообщен заряд Q . Шар радиусом R_1 находится внутри концентрической металлической заземленной сферы радиусом $R_3 = 3R_1$. Какой заряд q протечет по соединительному проводнику, если вдвое увеличить радиус шара R_2 ?

4. В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым подвижным поршнем. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При одинаковой во всем цилиндре температуре объем нижней части цилиндра равен объему верхней части. Каким будет отношение n объемов верхней и нижней частей, если температуру газа увеличить в два раза?

5. Одна сторона замкнутого проводящего контура в форме квадрата изготовлена из проволоки с удельным сопротивлением ρ_1 , три другие стороны — из проволоки с удельным сопротивлением ρ_2 . Длина стороны квадрата L , поперечные сечения проволок одинаковы. Контур помещен в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости контура, а величина изменяется во времени по закону $B = kt$. Определите напряжение U между точками соединения разнородных проволок.

Вариант 2

(факультет прикладной математики)

1. С какой минимальной скоростью v_0 следует бросить под углом α к горизонту камень, чтобы он достиг высоты h ?

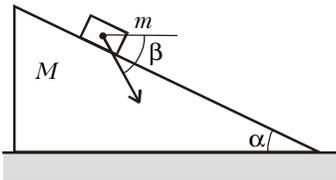


Рис. 2

2. На гладкой горизонтальной плоскости находится клин с углом α при основании (рис.2). Тело массой m , положенное на клин, опускается с ускорением, направленным под углом β к горизонтали ($\beta > \alpha$). Определите массу клина M . Трение не учитывать.

3. Амперметр сопротивлением R_1 , подключенный к источнику ЭДС, показывает ток I . Вольтметр сопротивлением R_2 , подключенный к такому же источнику, показывает напряжение U . Определите ток I_0 короткого замыкания источника.

4. На диаграмме зависимости давления p от объема V для некоторой массы идеального газа две изотермы пересекаются двумя изобарами в точках 1, 2, 3 и 4 (рис.3). Найдите отно-

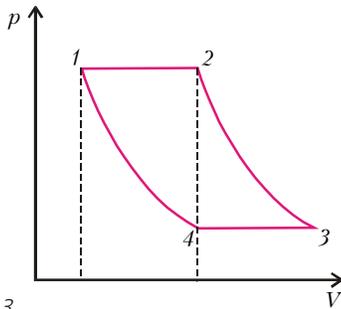


Рис. 3

шение температур T_3/T_1 в точках 3 и 1, если отношение объемов в этих точках $V_3/V_1 = \alpha$. Объемы газа в точках 2 и 4 равны.

5. На каком расстоянии d от тонкой собирающей линзы надо поместить предмет на главной оптической оси, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в k раз. Фокусное расстояние линзы F .

Вариант 3

(факультет информационной безопасности)

1. Мяч, брошенный со скоростью v_0 под углом α к горизонту, ударяется о вертикальную стену, находящуюся на расстоянии L от места бросания. Определите модуль скорости v мяча непосредственно перед ударом.

2. На гладком горизонтальном столе находится подвижный клин массой M с углом α при основании (рис.4). На клин опирается стержень массой m . Благодаря ограничителям стержень может двигаться только вдоль верти-

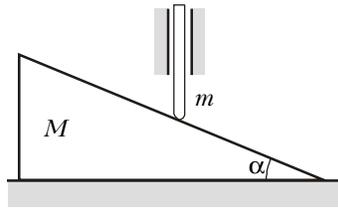


Рис. 4

кальной оси. Определите ускорение клина a . Трение не учитывать.

3. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора r , если известно, что при замыкании его на внешнее сопротивление R_1 напряжение на зажимах аккумулятора U_1 , а при замыкании на сопротивление R_2 напряжение на зажимах U_2 . Сопротивлением подводющих проводов пренебречь.

4. Диаграмма зависимости давления p от объема V для некоторой массы идеального газа состоит из двух изотерм и двух отрезков прямых, прохо-

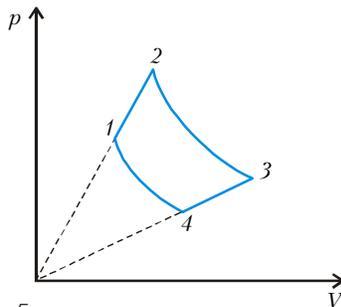


Рис. 5

дящих через начало координат (рис.5). Найдите объем газа V_4 в состоянии 4, если известны его объемы V_1 , V_2 и V_3 в состояниях 1, 2 и 3.

5. Расположенные в одной плоскости падения взаимно перпендикулярные лучи света идут из воздуха в жидкость. У первого луча угол преломления $\beta_1 = 30^\circ$, а у второго $\beta_2 = 45^\circ$. Найдите показатель преломления жидкости n .

Публикацию подготовили
А.Леденев, В.Кириллов,
В.Шапошников

Московский государственный
технический университет
им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два лыжника стартовали друг за другом с интервалом в 15 мин. Второй лыжник догнал первого в 15 км от точки старта. Дойдя до отметки 50 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 5 км

от точки поворота. Найдите скорости лыжников.

2. Решите уравнение

$$3 \cos x + 2\sqrt{2} \cos^2 x + \sqrt{2} \sin^2 x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg(5x^2 + 1)}{\lg(2x + 1)} = 2.$$

4. Решите неравенство

$$3^{1+\sqrt{x}} + 2 \cdot 3^{2-\sqrt{x}} < 29.$$

5. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{(x-3)^2}{2} = 1.$$

6. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x - 6 \\ |x| - 6 \end{cases} = 1, \\ (x - a)^2 + a - 6 = 0$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a .

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы 45° и 60° , а расстояние между боковым ребром и диагональю параллелепипеда, не пересекающей это ребро, равно l . Какой наименьший периметр может иметь сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ?

Вариант 2

1. Два каменщика выложили стены дома, работая сначала вместе 8 дней, а затем один первый каменщик – еще 7 дней. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то для ее выполнения первому потребовалось бы на 7 дней меньше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выложить стены этого дома?

2. Укажите все значения x , при которых функция

$$y = \sin^2 x - \sin x + 1$$

принимает наименьшие и наибольшие значения. Найдите эти значения.

3. Решите уравнение

$$\log_2(x - 2) = 2 - \log_2(x + 1).$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2 - x - 1} > 0.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на

графике функции

$$y = (2x - 15)(12 - x), \quad y > 0?$$

6. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\lg(x+y-1)}{\lg x} = 1, \\ (x-a)^2 + (y-a+5)(y-a) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. В сферу вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит прямоугольный треугольник ABC , а высота пирамиды совпадает с ребром TA . Боковое ребро TB образует с гипотенузой основания AB угол 45° , угол между TB и медианой основания CD равен 60° , а расстояние между прямыми TB и CD равно l . Найдите площадь сферы.

Публикацию подготовил Л. Паршев

Московский институт
электронной техники

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(технические факультеты)

1. Вычислите без таблиц и калькулятора

$$\frac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2}{2 \sin \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \cos(-\pi) - \sin \frac{\pi}{4}}$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 4x + 2) = \log_3(2x - 6).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ xy = 4. \end{cases}$$

4. Решите неравенство

$$0,125 \cdot 4^{2x-3} \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}.$$

5. Решите уравнение

$$(1 - \cos 3x) \operatorname{tg} x = 2 \sin^2 1,5x.$$

6. Велосипедист, проезжая каждую минуту на 500 м меньше, чем мотоциклист, на путь в 120 км затрачивает на 2 часа больше, чем мотоциклист. Найдите скорость велосипедиста.

7. Решите неравенство $f(a) < f(a-2)$, если $f(x) = \frac{1}{3-2x}$.

8. Постройте график функции

$$y = \log_3(x^2 + 6x + 9).$$

9. Через вершины A и B прямоугольного треугольника ABC (угол C – прямой) проведена окружность, касающаяся стороны AC и пересекающая продолжение стороны BC в точке D . Найдите радиус окружности, если известно, что $AB = 3$ и $CD = 3,2$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а двугранный угол при основании равен β . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной параллельно плоскости основания через центр вписанного в пирамиду шара.

11. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}.$$

Вариант 2

(экономический факультет)

Первые пять задач совпадают с первыми пятью задачами варианта 1.

6. Решите неравенство $(x^2 - 4x - 2,75)\sqrt{x^3 - 5x^2 - 8x + 40} \geq 0$.

7. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$|y| = f\left(\left|\frac{1}{f(|x|)}\right|\right),$$

где $f(x) = x - 2$.

8. Найдите все тройки чисел (x, y, z) , удовлетворяющие уравнению

$$\frac{3 \cos x + 4 \sin x + 5\pi + 5}{3 \sin y + 4 \cos y + 5} = \arccos \frac{z}{3} + \arcsin \frac{z}{3}.$$

9. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O ($\angle BOC = 120^\circ$). Известно, что числа, выражающие длины отрезков BO , OC и BC , являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите отношение длин отрезков DK и DC , если точка K – середина стороны BC .

10. В юношеских соревнованиях по прыжкам 35% от числа участников выполнили норматив II разряда по прыжкам в высоту и длину, 47% – по прыжкам в высоту и в тройном прыжке и 42% – в тройном и прыжкам в длину. Оказалось, что каждый участник выполнил норматив II разряда хотя бы по двум дисциплинам. Выполнители норматив по всем дисциплинам мечтают стать мастерами спорта, а выполнители только по прыжкам в высоту и длину мечтают получить II разряд в тройном прыжке, остальные

собираются остановиться на достигнутых результатах. При этом среди девушек мечтают стать мастерами 3%, а выполнить норматив в тройном прыжке 47%. Какой процент юношей собирается остановиться на достигнутых результатах, если мастерами из них мечтают стать 18%?

11. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 5}{x - 2 - x^2}.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Самолет совершает прямолинейный горизонтальный полет на высоте $H = 1$ км со скоростью $v_1 = 900$ км/ч. В тот момент, когда он находится над зенитной установкой, из нее производят выстрел. Чему равна минимальная начальная скорость v_2 снаряда, при которой цель может быть поражена? Спротивлением воздуха пренебречь.

2. Под действием горизонтальной силы $F = 12$ Н тело движется по горизонтальной шероховатой поверхности по закону $x = 5 + t^2$, где координата x измеряется в метрах, а время t – в секундах. Определите массу m тела, если коэффициент трения тела о поверхность $\mu = 0,1$.

3. Максимальная скорость математического маятника при малых колебаниях $v_m = 5$ см/с, период колебаний $T = 1$ с. Определите максимальный угол α_m отклонения маятника от вертикали в процессе колебаний.

4. При изотермическом сжатии идеального газа его давление изменилось на $\Delta p = 5 \cdot 10^4$ Па, а плотность возросла на $\Delta \rho = 0,5$ кг/м³. Определите плотность газа ρ_2 в конечном состоянии, если его давление стало $p_2 = 1,5 \cdot 10^5$ Па.

5. Некоторое количество одноатомного идеального газа совершает одну и ту же работу в изобарном и изотермическом процессах. Определите отношение η количеств теплоты, полученных газом в этих процессах.

6. Точечные заряды q , q и $-q$ расположены на одной прямой. Расстояние между соседними зарядами одинаковы. Крайние заряды q и $-q$ взаимодействуют между собой с силой $F_1 = 100$ Н. Какая суммарная сила F_2 действует на средний заряд q со стороны двух остальных?

7. К аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом подключают вольтметр и резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, один раз соединен-

ные параллельно, а другой – последовательно. При этом показания вольтметра не изменяются. Определите внутреннее сопротивление R_B вольтметра.

8. Электрон, движущийся со скоростью $v = 2 \cdot 10^6$ м/с, влетает в область двух перекрещивающихся под углом $\alpha = 90^\circ$ магнитных полей с индукциями $B_1 = 3$ мТл и $B_2 = 4$ мТл. Вектор скорости электрона перпендикулярен векторам \vec{B}_1 и \vec{B}_2 . Определите силу F , действующую на электрон.

9. Какую максимальную часть δ от своего роста может видеть человек ростом $H_1 = 1,8$ м в зеркале высотой $H_2 = 45$ см, располагая его на вертикальной стене?

10. Определите максимальный импульс p фотоэлектронов, если задерживающее напряжение для них $U = 3,2$ В.

Физические постоянные: ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², элементарный электрический заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Вариант 2

1. Пассажир первого вагона поезда длиной $l = 120$ м прогуливался по перрону. Когда он был у хвоста поезда, поезд начал двигаться с ускорением $a = 0,25$ м/с². Пассажир сразу же побежал к своему вагону со скоростью $v = 8$ м/с. Через какое время t он догонит вагон?

2. Веревка, лежащая на столе, начинает соскальзывать, когда длина свешивающейся со стола части составляет $\alpha = 1/4$ длины веревки. Определите коэффициент трения μ веревки о стол.

3. На какую величину x сожмется вертикально стоящая пружина жесткостью $k = 200$ Н/м с закрепленной на ее верхнем конце чашкой с пренебрежимо малой массой при падении на чашку с высоты $H = 1$ м от нее пластилинового шарика массой $m = 10$ г?

4. Азот массой $m = 0,56$ г, находящийся в сосуде объемом $V = 1$ л, нагрели до температуры $t = 1527^\circ\text{C}$, при которой часть $\alpha = 30\%$ молекул азота распалась на атомы. Определите установившееся в сосуде давление p газа.

5. На какую высоту H поднимет груз массой $m = 100$ кг идеальная тепловая машина, если рабочее тело этой машины получает от нагревателя при $T_1 = 400$ К количество теплоты $Q = 100$ кДж, а температура холодильника $T_2 = 300$ К?

6. Пластины плоского воздушного конденсатора притягиваются с силой $F = 0,1$ Н, если его заряд $q = 20$ мкКл.

Определите напряженность E электрического поля между пластинами.

7. Действующее значение напряжения на конденсаторе емкостью $C = 1$ мкФ в цепи переменного синусоидального тока с частотой $\nu = 400$ Гц равно $U = 36$ В. Определите амплитудное значение I_m тока в цепи.

8. Энергия магнитного поля катушки электромагнита с индуктивностью $L = 0,2$ Гн составляет $W = 5$ Дж. Определите величину ЭДС самоиндукции \mathcal{E} , возникающей в катушке, при равномерном уменьшении силы тока до нуля за время $t = 0,1$ с.

9. Предмет и его прямое уменьшенное изображение находятся на одинаковых расстояниях $a = 5$ см от фокуса линзы. Постройте ход лучей, формирующих изображение, и определите фокусное расстояние F линзы.

10. Рентгеновская трубка, работающая при напряжении $U = 50$ кВ и потребляющая ток $I = 1$ мА, излучает каждую секунду $N = 2,5 \cdot 10^{13}$ фотонов со средней частотой $\nu = 3 \cdot 10^{18}$ Гц. Определите коэффициент η полезного действия трубки.

Физические постоянные: ускорение свободного падения $g = 10$ м/с², универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К), молярная масса азота $M = 28$ г/моль, постоянная Планка $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Публикацию подготовили
А.Абрамов, А.Берестов, С.Куклин,
Д.Ничуговский, Т.Олейник,
А.Прокофьев, Т.Соколова

Московский энергетический институт (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Задачи письменного экзамена

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{a^2 - \sqrt{x + a^4}} + \frac{1}{a^2 + \sqrt{x + a^4}} \right)^{-1} + \left(\frac{2a^2 + a^4}{x + a^4} + \frac{1}{1 + a^4 x^{-1}} - 1 \right)^{-1}$$

2. Упростите выражение для функции $f(x)$ и постройте график $y = f(x)$, если

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^3(x^3 - 2)} + 1 + \sqrt{x(x+2)} + 1}{x^3 + x} - x \right)^{-1} \times 4^{\log_2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

3. Упростите выражение для функции

$$f(x) = \left(\frac{(\sqrt{x^3 - 2\sqrt{2}})(\sqrt{x + \sqrt{2}})^2}{x + \sqrt{2x} + 2} \right)^2 + \sqrt{\frac{(x^2 + 2)^2 - 8x^2}{\log_{\sqrt{2-x}}(\sqrt{2-x})}}$$

и для каждого значения параметра a решите уравнение

$$xf(x) + 6\sqrt{x^2 + (x-1)f'(x)} = 12 - 4a^2$$

4. Решите неравенство

$$\frac{3 - \sqrt[4]{9x - x^3}}{\sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{x^4 - \sqrt[4]{2x^3 - 18x}}{243}$$

5. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства

$$9^x - (3 + 3^{-2a}) \cdot 3^x + 3^{1-2a} < 0$$

непусто и ни одно из его решений не удовлетворяет неравенству

$$3x - x^2 < 0.$$

6. Велосипедист проезжает расстояние между пунктами A и B за 4 часа. Если велосипедист увеличит скорость на 4 км/ч, то на весь путь от A до B ему потребуется 3 часа. Найдите расстояние между A и B .

7. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 15 дней. После 12 дней совместной работы один из них заболел, и другой окончил работу один, проработав еще 4 дня. За сколько дней каждый из рабочих, работая отдельно, может выполнить всю работу?

8. Число 140 представьте в виде суммы двух натуральных чисел так, чтобы квадрат первого числа был меньше второго, а второе число было меньше первого, умноженного на 12.

9. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y \cos^2 2x + 4a \pi (\pi - x) = a^3 + 2y \cos^2 x, \\ \log_3(y \cos 4x - ax^2 - y \cos 2x + 9) = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

10. Пусть t_1, t_2 – действительные корни уравнения

$$3t^2 - (4a - 1)t - 3 = 0.$$

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого

значения параметра b функция

$$f(x) = \cos(t_1^2 + t_2^2 - t_1 t_2 - 4)\pi x + \cos b\pi x$$

является периодической. Для каждого из найденных значений a при любом b найдите наименьший положительный корень уравнения

$$f(x) + a = 1.$$

11. В треугольник ABC , площадь которого равна S , вписана окружность, касающаяся стороны BC в точке M . Найдите длины отрезков BM и MC , если $BM : MC = m : n$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

12. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с острым углом 60° , каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости ее основания под углом 30° . Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H .

13. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а третья наклонена к основанию под углом α . Найдите площадь основания пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна S .

14. В конус с радиусом основания R вписан цилиндр, объем которого равен V . Найдите высоту конуса, если высота цилиндра вдвое меньше радиуса основания конуса.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Какова разница в массе воздуха, заполняющего помещение объемом $V = 100 \text{ м}^3$ зимой и летом, если летом температура воздуха в помещении достигает $t_1 = 30^\circ \text{C}$, а зимой падает до $t_2 = 20^\circ \text{C}$? Атмосферное давление считать постоянным и равным $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

2. К батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 3 \text{ В}$ подключили резистор сопротивлением $R = 20 \text{ Ом}$, при этом напряжение на резисторе оказалось равным $U = 2 \text{ В}$. Определите ток короткого замыкания.

3. Ракета с включенным двигателем «зависла» над поверхностью Земли. Какова мощность, развиваемая двигателем, если масса ракеты M , а скорость истечения газов из двигателя v ?

Вариант 2

1. Запаянная с одного торца цилиндрическая трубка длиной L погружается в воду открытым торцом вниз до тех пор, пока запаянный торец не оказывается на одном уровне с поверхностью воды. Когда температура воздуха в трубке сравнялась с температурой

воды, оказалось, что вода в трубке находится на уровне ее нижнего торца. Определите начальную температуру воздуха T_0 , если температура воды остается постоянной и равной T_1 . Атмосферное давление p_0 . Влиянием поверхностного натяжения пренебречь.

2. Ток через аккумулятор в конце зарядки $I_1 = 4 \text{ А}$. При этом напряжение на его клеммах $U_1 = 12,36 \text{ В}$. При коротком замыкании аккумулятора ток $I_0 = 305 \text{ А}$. Определите напряжение на клеммах аккумулятора при разряде его током $I_2 = 6 \text{ А}$.

3. На горизонтальной поверхности лежат два тела массами m_1 и m_2 . Между ними находится ненапряженная пружина. Найдите минимальную горизонтальную постоянную силу, которую надо приложить ко второму телу, чтобы сдвинуть первое тело. Коэффициент трения между телами и горизонтальной поверхностью μ .

Вариант 3

1. Из баллона со сжатым кислородом израсходовали столько кислорода, что его давление упало от $p_1 = 9,8 \text{ МПа}$ до $p_2 = 7,8 \text{ МПа}$. Какая доля массы кислорода была израсходована? Температура кислорода постоянна.

2. В цепь, состоящую из аккумулятора и подключенного к нему резистора сопротивлением $R = 20 \text{ Ом}$, включили вольтметр сначала последовательно, а затем параллельно резистору. Показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. Сопротивление вольтметра $R_v = 500 \text{ Ом}$. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

3. Свернувшаяся в кольцо змея длиной l начинает равномерно со скоростью v подниматься вертикально вверх. Найдите массу змеи m , если в произвольный момент времени t во время подъема на змею действует сила реакции опоры N .

Вариант 4

1. Давление газа в сосуде при температуре $t_1 = 127^\circ \text{C}$ составляет $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Определите давление газа p_2 после того, как треть массы газа была выпущена из сосуда, а температура понижена до $t_2 = 77^\circ \text{C}$.

2. Источник тока замыкается один раз на резистор сопротивлением $R_1 = 4 \text{ Ом}$, а другой раз – сопротивлением $R_2 = 9 \text{ Ом}$. В том и в другом случае количество теплоты, выделяемое на каждом резисторе за одно и то же время, одинаково. Каково внутреннее сопротивление источника тока?

3. Шарик для игры в настольный теннис радиусом $R = 15 \text{ мм}$ и массой

$m = 5 \text{ г}$ погружен в воду на глубину $h = 30 \text{ см}$. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $H = 10 \text{ см}$. Определите количество механической энергии, перешедшей в тепло.

Вариант 5

1. В цепи, состоящей из источника с ЭДС $\mathcal{E} = 8 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 1,5 \text{ Ом}$ и внешнего сопротивления, идет ток $I_1 = 0,6 \text{ А}$. Какой ток I_2 пойдет при уменьшении внешнего сопротивления в два раза?

2. Найдите заряд заземленного металлического шара радиусом R , если на расстоянии l от его центра находится точечный заряд Q .

3. Два тела массами $m_1 = 4 \text{ кг}$ и $m_2 = 6 \text{ кг}$ движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $v = 10 \text{ м/с}$. Найдите количество теплоты, которое выделится при абсолютно неупругом соударении этих тел.

Публикацию подготовили
В. Прохоренко, А. Седов

Новосибирский
государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – это задача-оценка. Для ее решения надо понять расстраиваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь надо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

Вариант 1

1. Вертикально стоящий цилиндр перекрыт поршнем площадью S и массой M . Между поршнем и цилиндром есть трение. Поршень начнет опускаться, если на него надавить силой F_1 , и подниматься, если его потянуть вверх силой F_2 . Найдите давление в цилиндре, если атмосферное давление равно p_0 .

2. Невесомый стержень длиной L соединяет точечные грузы массами m_1 и m_2 , которые подвешены к общей точке O на потолке на нитях длиной r (рис.1). Стержень привели в горизонтальное положение и отпустили. Най-

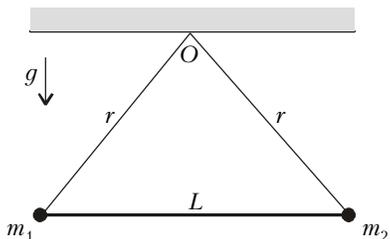


Рис. 1

дите ускорения грузов в первый момент времени.

3. В схеме на рисунке 2 две внутренние металлические пластины заряжены зарядами q и $-q$ соответственно. Две внешние, вначале незаряженные,

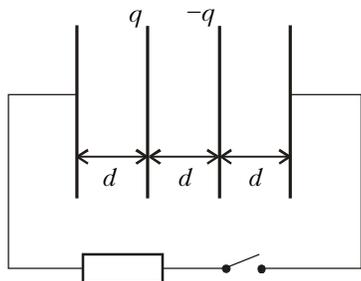


Рис. 2

металлические пластины соединяют через резистор. Какой заряд пройдет при этом через резистор и какое количество теплоты выделится в нем? Расстояния между соседними пластинами d , площадь каждой пластины S .

4. Для спасения людей при пожаре используют аварийные брезентовые полотнища, удерживаемые спасателями по периметру. Оцените, с какой высоты на них может упасть человек, не ударившись при торможении о землю.

5. К одному концу упругой стальной линейки прикреплен груз, а другой конец ее жестко зафиксирован так, что линейка вертикальна. Отклоняя груз, вызывают его колебания. Один раз опыт проводят при верхнем положении груза, а другой – при нижнем.

Объясните, почему при примерно одинаковой амплитуде периоды колебаний заметно отличаются.

Вариант 2

1. Ракета стартует под углом α к горизонту. Найдите ее ускорение, если реактивная струя образует угол β с направлением взлета. Ускорение свободного падения g .

2. В вертикально стоящем цилиндре сечением S на поверхности жидкости плотностью ρ удерживают поршень массой m с открытой длинной вертикальной трубкой сечением S_0 . Поршень отпускают. Какое количество теплоты выделится по окончании движения поршня? Ускорение свободного падения g .

3. Перемычка массой m соединяет рельсы, к левым концам которых присоединены выводы незаряженного конденсатора емкостью C (рис.3). Слева от плоскости MN создано однородное магнитное поле с индукцией B , справа магнитного поля нет. Расстояние между рельсами h . Перемычке внезапно

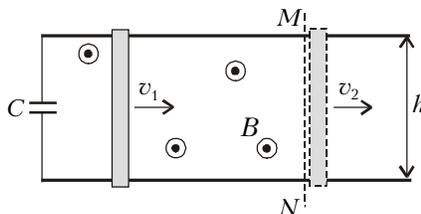


Рис. 3

сообщают скорость v_1 . Какой ток будет течь через перемычку сразу после ее выхода из поля, если ее скорость в этот момент равна v_2 ? Сопротивление перемычки R , сопротивлением рельсов пренебречь.

4. Тонну золота взвесили с хорошей точностью сначала зимой на морозе, а потом при июльской жаре. Оцените, на сколько разошлись показания весов. Эффект теплового расширения золота мал. Золото примерно в двадцать раз тяжелее воды. Атмосферное давление принять неизменным.

5. В стеклянной трубке, расположенной под углом к горизонту, находится неподвижная цепочка. Если трубку медленно вращать вокруг оси, цепочка выскальзывает из трубки через верхний конец. Объясните наблюдаемое явление.

Вариант 3

1. Расстояние между лазером и экраном равно L . Если к выходному отверстию лазера приложить тонкую собирающую линзу, радиус пятна на экране увеличится в два раза. Найдите фокусное расстояние линзы.

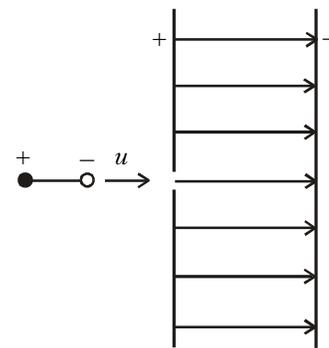


Рис. 4

2. «Гантелька» представляет собой тонкий массивный непроводящий стержень с закрепленными на его концах одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами. Вдали от конденсатора «гантелька» была сориентирована перпендикулярно пластинам и имела скорость u (рис.4). Когда «гантелька» влетела в заряженный плоский конденсатор через малое отверстие в центре пластины, ее скорость оказалась равной v . Какую скорость будет иметь «гантелька» в конденсаторе, если еще до ее влета поменять полярность конденсатора на противоположную? Поле тяжести пренебречь.

3. Два одинаковых валика, представляющих собой тонкостенные цилиндры массой m , могут вращаться без трения на закрепленных горизон-

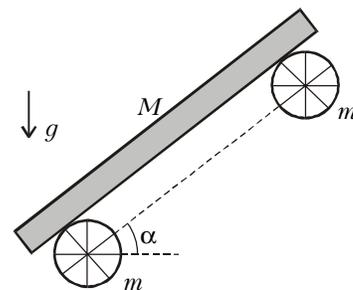


Рис. 5

тально осях, которые расположены в плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис.5). На валики осторожно кладут доску массой M так, что расстояния от ее концов до точек касания с валиками одинаковы. Определите коэффициент трения между валиками и доской, при котором доска не будет проскальзывать относительно валиков в первый момент времени.

4. Оцените отношение массы кислорода, содержащегося в молекулах воды океанов Земли, к массе кислорода в атмосфере Земли.

5. См. задачу 5 варианта 2.

Публикацию подготовил
Г.Меледин

Российский государственный
педагогический университет
им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА
Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x) = (x+2)(x^4 - 4nx^2 + 4n^2)^{-1/2}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции $g(x) = f_2(x)$.

в) Решите уравнение

$$\lg f_3(x) = \lg(x+2).$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3^x - 25}{x+1} \leq \frac{3^x - 25}{x-3}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$\sin \pi x + \sin 2\pi x + \sin 3\pi x + \sin 4\pi x = 0$,
удовлетворяющие неравенству

$$\left| x - \frac{\pi}{6} \right| < \frac{\pi}{6}.$$

4. Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 26. Найдите длину высоты треугольника, проведенной к стороне 27.

5. Основанием пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого равна d , а острый угол равен α . Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом β . Найдите площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

Вариант 2

1. Для каждого натурального числа n определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{(x+n)(3-x)(x-1)}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \frac{f_3^2(x)}{3|x-1|}.$$

в) При каких значениях a уравнение $g(x) - 2a = 0$ имеет единственное решение?

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_{1/2}(x+1)}{\log_{1/2}(2-x)} \geq 1.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{3} \cos 2x - \sin x}{\sin 3x} = -1,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\left| x - \frac{3\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2}.$$

4. На диаметре $2R$ полуокружности построен правильный треугольник, сторона которого равна диаметру. Треугольник расположен по ту же сторону от диаметра, что и полуокружность. Вычислите площадь той части треугольника, которая лежит вне круга.

5. В правильной треугольной призме со стороной основания a построено сечение, проходящее через сторону нижнего основания и центр верхнего основания призмы. Найдите площадь сечения, если оно составляет с плоскостью основания угол α .

Публикацию подготовили
Г.Хамов, О.Корсакова

Российский государственный
технологический университет
им. К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$|2x - 3| = 5x - 4.$$

2. Найдите интервалы монотонности функции

$$y = \frac{4x^2 + 11x - 16}{x + 4}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-4} 5 \geq \log_{x+8} 25.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

5. Имеются три слитка. Первый слиток имеет массу 2 кг, второй 4 кг, и каждый из этих двух слитков содержит 60% никеля. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 45% никеля, а если второй сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 48% никеля. Найдите массу третьего слитка и процент содержания никеля в нем.

6. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как 8 : 1. В трапецию вписана окружность, которая касается боковой стороны CD в точке K , причем $CK : KD = 5 : 4$. Найдите отношение длин боковых сторон AB и CD .

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$x^4 + 3x^2 - 10 = 0.$$

2. Найдите точки экстремума функции

$$y = \frac{3x-1}{x^2+x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-3} 81 \cdot \log_3(x-1) \leq 8.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{12}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 y} = 12, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 168 деталей. Первые четыре дня он выполнял установленную планом норму, а затем каждый день изготовлял на 8 деталей больше плана, поэтому за два дня до срока было изготовлено 188 деталей. Сколько деталей в день он должен был изготовлять по плану?

6. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка E , а на стороне BC — точка K так, что отрезок EK параллелен стороне AC и касается вписанной в треугольник окружности. Биссектриса BD пересекает отрезок EK в точке M , а биссектриса AL пересекает продолжение отрезка EK за точку K в точке N . Найдите отношение $EM : MN$, если известно, что периметр треугольника ABC равен 14, а сторона $AC = 6$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Гирька массой 0,3 кг, подвешенная на пружине жесткостью 15 Н/м, колеблется так, что ее максимальная скорость равна 2,8 см/с. Найдите амплитуду колебаний. Силами сопротивления пренебречь.

2. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом 45° . Скорость света в первой среде $2,25 \cdot 10^8$ м/с.

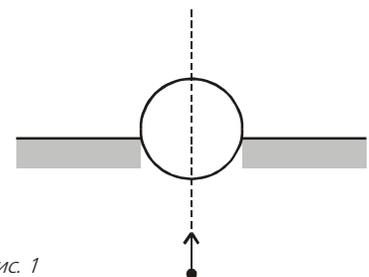


Рис. 1

Вычислите длину волны света во второй среде, если энергия фотонов $2,65 \cdot 10^{-19}$ Дж, а угол преломления луча 30° .

3. Пуля массой 10 г с энергией 450 Дж пробивает шар, лежащий на подставке (рис.1). Во сколько раз уменьшилась кинетическая энергия пули, если шар подпрыгнул на 20 см? Масса шара 0,4 кг.

4. Найдите работу, совершаемую одним молем одноатомного газа в цикле 1-2-3-4-1 (рис.2), если известно:

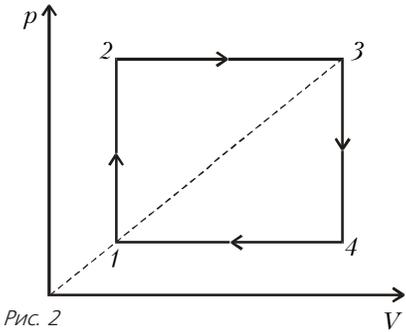


Рис. 2

$T_1 = 150$ К, $T_3 = 450$ К, точки 1 и 3 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

5. Два небольших заряженных шарика, имеющие одинаковую массу 1 г, подвешены, как показано на рисунке 3. Все нити натянуты и имеют одина-

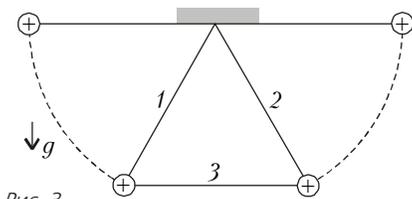


Рис. 3

ковую длину. После пережигания нити 3 максимальная высота подъема шариков такова, что нити 1 и 2 принимают горизонтальное положение. Определите натяжение нитей 1 и 2 в горизонтальном положении. Массами нитей пренебречь.

6. Идеальный вольтметр, подсоединенный к точкам A и B схемы (рис.4), показал напряжение 220 В. Что покажет тот же вольтметр, если его под-

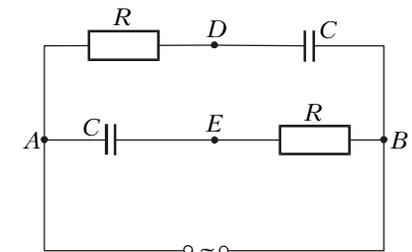


Рис. 4

ключить к точкам D и E? Известно: $R = 1,2$ кОм, $C = 5$ мкФ. Сопротивлением проводов пренебречь.

Вариант 2

1. Вольфрамовую пластину облучают светом с длиной волны 200 нм. Найдите максимальный импульс вылетающих из пластины электронов, если работа выхода для вольфрама 5,3 эВ.

2. В изотермическом процессе газ совершил работу 1000 Дж. Затем газу сообщили еще 1000 Дж теплоты, но уже изобарно. На сколько увеличилась внутренняя энергия этого газа, если газ одноатомный? Изобразите произошедшие процессы на графике в координатах p, V .

3. В колебательном контуре индуктивность катушки 0,2 Гн, амплитудное значение тока в контуре 40 мА. Найдите энергию магнитного поля катушки и энергию электрического поля конденсатора в тот момент, когда мгновенное значение силы тока отличается от амплитудного в 2 раза. Сопротивление контура равно нулю.

4. Камень, брошенный с поверхности земли со скоростью, равной 20 м/с и направленной под углом 60° к горизонту, попал в стенку на высоте 10 м. Под каким углом к горизонту была направлена скорость камня в этот момент?

5. В схеме на рисунке 5 все 3 резистора имеют одинаковые сопротивле-

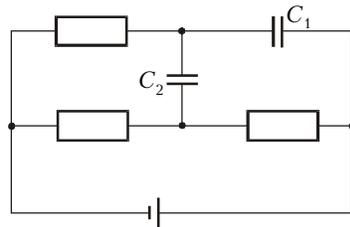


Рис. 5

ния, а емкости конденсаторов $C_1 = 40$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ. Заряд какого конденсатора больше и во сколько раз?

6. Два одинаковых небольших шарика соединены невесомой пружиной и лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Один из шариков закреплен. Шарикам сообщают одинаковые заряды, в результате длина пружины увеличивается вдвое. Как изменяется при этом частота малых (по сравнению с длиной пружины) колебаний системы?

Публикацию подготовили
Т.Медина, Г.Никулин, А.Симонов

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{a - 0,16}{\sqrt{a} - 0,4} - \frac{a\sqrt{a} - 0,064}{a + 0,4\sqrt{a} + 0,16}$$

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(8 - x)} > 2 - x$$

3. Сумма 9-го и 16-го членов арифметической прогрессии равна 12. Найдите сумму первых 24 членов этой прогрессии.

4. Решите уравнение $|-x^2 - 4| = 4x$.

5. Решите уравнение $5^x + 5^{x+2} = 130$.

6. Вычислите $\log_{49} 121 + \log_7 (49/11)$.

7. Вычислите

$$\sin 10^\circ \sin 100^\circ - 0,5 \sin 20^\circ + 3$$

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}(82^\circ + x) + \operatorname{tg}(8^\circ - x) = 2$$

9. Найдите наименьшее значение, которое может принимать расстояние между точками пересечения с координатными осями касательной к кривой

$$y = \frac{1000\sqrt{3}}{9x^2}$$

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_{x^2} (4x + 96) \geq 1?$$

11. В ромбе ABCD с острым углом BAD через вершины A, B, D проведена окружность. Она пересекает сторону ромба BC в точке M такой, что $BM : MC = 1 : 4$. Найдите $\cos \angle BAD$.

12. В правильной треугольной пирамиде боковая грань составляет с плоскостью основания угол β , $\cos \beta = 0,25$. В пирамиду вписан шар объемом 25, к шару проведена касательная плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду, отсекаемую этой плоскостью.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{2\sqrt{5}xy}{x^2y^2 - 5} + \frac{xy - \sqrt{5}}{2xy + 2\sqrt{5}} \right) \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt{5}} - \frac{xy}{xy - \sqrt{5}} + 4,1$$

и найдите его значение при $x = 2$, $y = 0,134$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{0,5(x^2 + 11x + 32)} = -x - 6.$$

3. Произведение 14-го и 30-го членов геометрической прогрессии равно 0,09. Найдите 22-й член этой прогрессии, если известно, что он положительный.

4. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства

$$|x + 7,5| > 10.$$

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{(\sqrt{3})^{x-5}}{4^{x-5}} > \frac{3\sqrt{3}}{64}.$$

6. Вычислите $\log_4 10 \cdot \lg 0,5$.

7. Вычислите

$$\frac{2 \sin^2 20^\circ - 1}{2 \operatorname{ctg} 65^\circ \cos^2 205^\circ}.$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos 15^\circ \sin 3x - \sin 15^\circ \cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9. Из начала координат O к графику функции $y = x^2 + ax + 8,41$ проведена касательная, точка касания обозначена M . Найдите наименьшее значение длины отрезка OM при всевозможных допустимых значениях параметра a .

10. Найдите меньший корень уравнения

$$\frac{x}{20} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_x 50}.$$

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) известны расстояния от вершины B до точки пересечения высот, равное 2,8, и до точки пересечения биссектрис, равное 4. Найдите площадь треугольника ABC .

12. Около правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ с основанием $ABCDEF$ описан шар радиуса 94 с центром в точке N , лежащей внутри пирамиды. Около пирамиды $NABCDEF$ описан шар радиуса 49. Найдите тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды $SABCDEF$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ.

Вариант 1

1. Сила в 45 Н сообщает телу ускорение $0,75 \text{ м/с}^2$. Какая сила сообщит этому телу ускорение $1,75 \text{ м/с}^2$?

2. Подъемный кран приводится в действие двигателем мощностью 8 кВт. Сколько секунд потребуется для равномерного подъема груза массой 1500 кг на высоту 40 м, если КПД двигателя 75%? Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

3. Шар массой 3 кг, имевший скорость 4 м/с, испытал абсолютно неупругий удар с покоящимся шаром такой же массы. Сколько тепла выделилось при ударе?

4. С каким ускорением будет падать в воде кусок стекла плотностью 2500 кг/м^3 ? Трение о воду не учитывать. Плотность воды 1000 кг/м^3 , $g = 10 \text{ м/с}^2$.

5. Определите изменение внутренней энергии двух молей газа при изобарном нагревании от 5°C до 10°C , если газу было сообщено количество теплоты 210 Дж. Универсальная газовая постоянная $8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

6. Какая энергия (в кДж) расходуется на нагревание электроутюга в течение 50 с, если напряжение в сети 220 В, а сила тока 3 А?

7. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $8,36 \text{ мТл}$ перпендикулярно линиям поля. С какой угловой скоростью (в с^{-1}) будет вращаться протон? Заряд протона $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, его масса $1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

8. Во сколько раз увеличится длина волны, на которую резонирует колебательный контур приемника, если между обкладками конденсатора этого контура ввести диэлектрик с диэлектрической проницаемостью, равной 9?

9. Шарик падает на наклонную плоскость из точки A без начальной скорости и испытывает с плоскостью абсолютно упругое соударение. На каком расстоянии от места падения он ударится о плоскость второй раз? Угол наклона плоскости 45° , а расстояние от точки A до плоскости 25 см.

10. Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре 5°C . Длина каждой части 144 мм. Одну часть сосуда нагрели на 18°C , а другую на 2°C . На какое расстояние (в мм) сместится поршень?

11. В вершинах острых углов ромба закреплены заряды 7 нКл , а в вершинах тупых углов находятся две частицы массой 2 мг и зарядом 2 нКл каждая. Частицы одновременно отпускают, и они приходят в движение. Чему будет равна скорость частиц на большом расстоянии от зарядов? Сторона ромба 3 см, а его острый угол 60° . Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$.

12. Пловец, нырнувший с открытыми глазами, рассматривает из-под воды светящийся предмет, находящийся над его головой на высоте 60 см над поверхностью воды. Какова будет видимая высота предмета (в см) над поверхностью воды? Показатель преломления воды $4/3$. Углы считать малыми, т.е. $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha$.

Вариант 2

1. Найдите высоту подъема сигнальной ракеты, выпущенной со скоростью 40 м/с под углом 30° к горизонту. Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

2. Тело массой 2 кг двигалось по окружности, причем в некоторой точке оно имело скорость 3 м/с . Пройдя треть окружности, тело приобрело скорость 5 м/с . Определите модуль изменения импульса тела.

3. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шару, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости, если он висит на жестком невесомом стержне длиной $1,25 \text{ м}$? Считать $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

4. Сплошное тело плавает в воде, причем над водой находится 30% его объема. Объем тела $0,2 \text{ м}^3$. Определите массу тела. Плотность воды 1000 кг/м^3 .

5. Горячее тело, температура которого 70°C , приведено в соприкосновение с холодным телом с температурой 20°C . В тепловом равновесии установилась температура 30°C . Во сколько раз теплоемкость холодного тела больше теплоемкости горячего?

6. Расстояние между двумя положительными точечными зарядами 10 см. На расстоянии 8 см от первого заряда на прямой, соединяющей заряды, напряженность поля равна нулю. Найдите отношение величины первого заряда к величине второго.

7. Зависимость координаты колеблющейся точки от времени имеет вид $x = A \sin(\pi t/12)$. Известно, что в момент времени $t = 10 \text{ с}$ смещение равно 6 мм. Определите амплитуду колебаний (в мм).

8. На плоскопараллельную стеклянную пластинку падают под углом 60° два параллельных луча света, расстояние между которыми 4,5 см. Найдите расстояние (в см) между точками, в которых эти лучи выходят из пластинки.

9. Лежащее на горизонтальной поверхности тело приходит в движение под действием горизонтальной силы, составляющей 60% его веса. Сила действует некоторое время, потом прекращает действовать. Найдите полное время движения, если известно, что

полный путь, пройденный телом, составляет 24 м, а коэффициент трения равен 0,2. Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

10. Два баллона соединены между собой трубкой с краном. В одном баллоне находится газ массой 2 г под давлением 100 кПа, в другом – такой же газ массой 4 г под давлением 400 кПа. Какое давление (в кПа) установится в баллонах, если открыть кран? Температуры газов в баллонах одинаковы.

11. Полезная мощность батареи равна 6 Вт при двух значениях тока в цепи: 2 А и 6 А. Чему равна максимальная полезная мощность этой батареи?

12. На шарик массой 5 г нанесли заряд 2 мКл, подвесили его на нити длиной 10 м в горизонтальном магнитном поле, отклонили на угол α ($\cos \alpha = 0,28$) в плоскости, перпендикулярной полю, и отпустили. При прохождении грузом нижней точки натяжение нити оказалось равным 170 мН. Определите величину магнитной индукции. Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

*Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан*

Санкт-Петербургский
государственный технический
университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{2}{a-2\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}+2} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2. Вычислите $3^{\log_2 5} \cdot 5^{-\log_2 3}$.

3. Число 12 составляет 45% числа n . Найдите 30% числа n .

4. Вычислите $\cos^2 120^\circ - \sin 210^\circ$.

5. Решите уравнение

$$2 \cdot 3^{-x} - 3^{|x|} = 3^{x+1}.$$

6. Решите уравнение

$$\log_3(x-6) \cdot \log_x 9 = 1.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt{x} = \frac{2-x^2}{\sqrt{x}}.$$

8. Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что $\cos \alpha < 0$ и что $\sin 2\alpha = \cos \alpha$.

9. Вычислите

$$\arctg(\sqrt{5}+2) - \arctg(2-\sqrt{5}).$$

10. Решите неравенство $x+1 > x^3+x^2$.

11. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x}}{x+2} \geq 0$.

12. Найдите область определения функции

$$y = \log_2(x+1)^2 + \sqrt{2+x}.$$

13. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{2x^2+2x+2}{2x^2+2x+1}.$$

14. Найдите уравнения осей симметрии графика функции $y = \cos 2x$.

15. Найдите такие векторы, которые с векторами $\vec{a}(-1; -2)$ и $\vec{b}(2; 1)$ составляют треугольник.

16. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 2(a-1)x + 3a = 0$ имеет два корня, являющихся целыми числами?

17. Первый член возрастающей арифметической прогрессии $a_1 = -3$; известно, что для всех ее членов, начиная со второго, выполнены равенства $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 4$. Найдите четвертый член прогрессии.

18. Решите уравнение $\sin x \sin 5x = 1$.

19. Окружность пересекает основание прямоугольника и касается прямых, на которых лежат три другие стороны прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что длина основания равна 10, а его отрезок заключенный внутри окружности, равен 8.

20. Каким должен быть радиус основания конуса, чтобы объем конуса был наибольшим, если известно, что сумма длин радиуса и образующей конуса равна 10?

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{a-a^{-1}}{1+a^{-1}} - \frac{a-a^{-1}}{1-a^{-1}}.$$

2. Вычислите $(\log_{\sqrt{2}} 9)(\log_8 3)^{-1}$.

3. Произведение двух чисел увеличилось на 80% после того, как первый множитель увеличили на 50%, а второй множитель изменили на $A\%$. Найдите A .

4. Упростите выражение

$$\frac{1+\cos 250^\circ}{\sin 35^\circ \cos 55^\circ}.$$

5. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = x\sqrt{2}$.

6. Найдите сумму решений уравнения $|4x-4| = x^2$.

7. Решите уравнение

$$4^{4-x} \log_2 x = 2^x \log_4 x.$$

8. Найдите натуральные n , для которых

$$\left(\frac{\text{НОД}(n, 4)}{\text{НОД}(n, 4)}\right)^2 = n$$

(НОД($n, 4$)) – наибольший общий делитель чисел n и 4).

9. Найдите наименьшее целое значение n , при котором 9π является периодом функции

$$y = \cos x \cos \frac{3x}{n}.$$

10. Найдите $\cos 3\alpha$, если известно, что

$$2 \cos 2\alpha = -1 \text{ и } |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}.$$

11. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}.$$

12. Решите неравенство $\frac{1}{2-|x|} > 1$.

13. Сумма третьего и пятого членов возрастающей геометрической прогрессии равна 8, а разность между пятым и первым ее членами равна 4. Найдите знаменатель прогрессии.

14. Решите неравенство

$$\frac{x^3+3x^2}{1+x} \leq 0.$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = -2x, \\ \sqrt{y} = x + 2. \end{cases}$$

16. Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \frac{2x}{x-1}.$$

17. Найдите множество значений функции

$$y = 4^x \cdot 2^{1-x^2}.$$

18. α , β и γ – углы треугольника. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 2$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2}$. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$.

19. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в 3 раза меньше высоты. Найдите объем пирамиды, если известно, что длина высоты равна $\sqrt{3}$.

20. При каких значениях параметра p функция $y = 2 \sin x + p \sin 2x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

*Публикацию подготовили
С.Преображенский, Ю.Хватов*