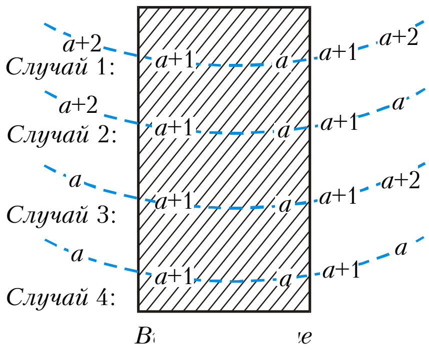

Рис. 4

два соседних числа из оставшихся будут различаться на 1 (на рисунке 4 наименьшее из незначительных чисел обозначено a). Однако в результате применения элементарной операции количество чисел уменьшается на 2, а величина декремента уменьшается на 1. Таким образом, через $S-1$ шагов мы придем к структуре, состоящей всего из двух чисел и декрементом 1. Следовательно, $n-2\cdot(S-1)=2$, откуда $n=2S=2(M-m)$.

10. Воспользуемся следующим фактом: если натуральное число k представляется в виде разложения на простые множители $k=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_m^{n_m}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – простые числа, а все показатели степеней $n_1, n_2, \ldots, n_m$ – целые неотрицательные числа, то количество делителей числа k выражается формулой $(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_m+1)$ (см., например, по этому поводу энциклопедию для детей «Математика» издательства «Аванта +» (1998), с.157).

Запишем искомое число N в виде следующего разложения на простые множители: $N=2^{n_2}\cdot 3^{n_3}\cdot 5^{n_5}\cdot 7^{n_7}\cdot\ldots\cdot p^{n_p}$, где n_2, n_3, n_5, …, n_p – неотрицательные целые числа, причем, поскольку число N делится на 100, то $n_2\ge 2$, $n_5\ge 2$. Согласно условию задачи, должно выполняться равенство

$$2^{n_2-2}\cdot 3^{n_3}\cdot 5^{n_5-2}\cdot 7^{n_7}\cdot\ldots\cdot p^{n_p}=$$
$$=(n_2+1)(n_3+1)(n_5+1)(n_7+1)\ldots(n_p+1).\quad(*)$$

Заметим, что при целом $m\ge 0$ для любого простого $p\ge 3$ выполняется неравенство $p^m\ge m+1$, причем равенство возможно лишь при $m=0$. Отсюда

$$3^{n_3}\cdot 7^{n_7}\cdot 11^{n_{11}}\cdot\ldots\cdot p^{n_p}\ge(n_3+1)(n_7+1)(n_{11}+1)\ldots(n_p+1),$$

причем равенство здесь возможно лишь при $n_3=n_7=\ldots=n_p=0$. Кроме того, применяя метод математической индукции, можно доказать, что при

$$1)\, n_5=2 \text{ и } n_2>6,\quad 2)\ n_5=3 \text{ и } n_2>4,\quad 3)\ n_5>3$$

произведение $2^{n_2-2}\cdot 5^{n_5-2}$ больше $(n_2+1)(n_5+1)$ и, следовательно, при таких значениях параметров n_2, n_5 равенство $(*)$ невозможно.

Разбор других случаев требует более тонкого анализа.

Для упрощения записи введем обозначения

$$A=7^{n_7}\cdot 11^{n_{11}}\cdot\ldots\cdot p^{n_p},\qquad B=(n_7+1)(n_{11}+1)\ldots(n_p+1);$$

равенство $(*)$ запишется так:

$$2^{n_2-2}\cdot 3^{n_3}\cdot 5^{n_5-2}\cdot A=(n_2+1)(n_3+1)(n_5+1)\cdot B.\quad(**)$$

Отметим, что число A нечетное и $A\ge B$ (равенство здесь возможно лишь при $n_7=n_{11}=\ldots=n_p=0$).

При 4) $n_2=n_5=2$, поскольку в правой части $(**)$ не должно быть четных сомножителей, то число n_3 обязательно должно быть четным. При $n_3=2$ в правой части $(**)$ степень тройки выше, чем в левой части; при $n_3\ge 4$ левая часть $(**)$ превышает правую.

При 5) $n_2=3$; $n_5=2$, 6) $n_2=2$; $n_5=3$, 7) $n_2=3$; $n_5=3$ в правой части $(**)$ степень двойки выше, чем в левой.

При 8) $n_2=4$; $n_5=2$ в правой части $(**)$ степень пятерки выше, чем в левой.

При 9) $n_2=5$; $n_5=2$ в правой части $(**)$ показатель степени тройки не меньше 2, но в этом случае левая часть $(**)$ превышает правую.

При 10) $n_2=6$; $n_5=2$ в правой части $(**)$ показатель степени тройки не меньше 1, но в этом случае левая часть $(**)$ превышает правую.

При 11) $n_2=4$; $n_5=3$ равенство $(**)$ приводится к виду

$$3^{n_3}A=(n_3+1)B,$$

что возможно в одном-единственном случае $n_3=n_7=n_{11}=\ldots=n_p=0$.

Итак, условию задачи удовлетворяет единственное число $N=2^4\cdot 5^2=2000$. Его делители: 1, 2, 4, 8, 16, 5, 25, 125, 10, 50, 250, 20, 100, 500, 40, 200, 1000, 80, 400, 2000.

Качающаяся скала

1. Из требования минимума потенциальной энергии тела в положении устойчивого равновесия вытекает, что при отклонении тела от равновесия его центр тяжести повышается. Этот факт и позволяет вывести критерий устойчивости (2).

Найдем изменение высоты ΔH центра тяжести P, сравнивая положение скалы на рисунках 1 и 2 статьи. Поворот скалы без проскальзывания на круглой опоре можно представить как результат двух последовательных перемещений: поворота вокруг центра O' всей системы скала – опора как единого целого на угол α и далее поворот только скалы вокруг центра O на угол β. Поэтому

$$\Delta H=\Delta h_1+\Delta h_2=-(R+CP)(1-\cos\alpha)+PO(\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)).$$

Но $CP+PO=r$ по определению и $\alpha R=\beta r$ из-за отсутствия проскальзывания. Кроме того, для малых углов α (а также β и $\alpha+\beta$) справедливо приближенное равенство $\cos\alpha=1-\alpha^2/2$. Упрощая выражение для ΔH, получим

$$\Delta H=\frac{\alpha^2}{2}\left(-R-r+\left(1+\frac{R}{r}\right)^2 r-\left(1+\frac{R}{r}\right)^2 CP\right),$$

откуда следует, что в положении устойчивого равновесия, когда $\Delta H>0$,

$$CP<\frac{Rr}{R+r},$$

т.е. получена формула (2). Критерий устойчивости можно записать также в виде

$$\frac{1}{CP}>\frac{1}{R}+\frac{1}{r}.$$

Но величина, обратная радиусу кривизны поверхности тела, называется кривизной этой поверхности (см. Примечание к статье). Таким образом, мы доказали теорему, согласно которой для устойчивого равновесия тела на опоре величина, обратная расстоянию от центра тяжести тела до точки его контакта с опорой, должна быть больше, чем сумма кривизны поверхности тела и опоры в точке контакта.

2. Эта задача знакомит нас с еще одним понятием, важным для изучения равновесия тел. Речь идет о границах области устойчивости равновесного положения тела. Действительно, надо представлять, сколь большим может быть отклонение тела от положения равновесия, при котором оно, предоставленное потом самому себе, вернется в это положение. В случае достаточно больших отклонений тело потом сможет занять новое положение равновесия или будет совершать колебания около него. Равновесия может и не быть вовсе: любое новое положение тела оказывается неустойчивым.

Определять границы области устойчивости – это, как правило, задача более трудная, чем исследовать устойчивость тела, когда есть малый параметр – угол отклонения от положения равновесия. В качестве примера рассмотрим равновесие «ваньки-встаньки» на вершине неподвижной сферы радиусом