«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Может. Например, из цифр 1, 1 и 3 составляются лишь простые трехзначные числа 113, 131, 311.

2. Пусть x, y, z – соответственно количество троек, четверок и пятерок. Тогда решение задачи сводится к решению системы в натуральных числах

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ 3x + 4y + 5z = 46. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 5 и вычтя из результата второе уравнение, находим $2x + y = 4$. Отсюда $x = 1$, $y = 2$, и, следовательно, $z = 7$. Шестиклассник получил одну тройку, две четверки и семь пятерок.

3. Можно. Для этого на левую чашку весов положим один красный и два синих шарика, а на правую – один желтый и два зеленых. Белые шарики вообще на весы не кладем. Затем с помощью гирь-разновесов определяем, какая чашка тяжелее и на сколько граммов. Здесь возможны следующие варианты:

1) Если легкими являются белые шарики, то весы, очевидно, будут в равновесии.

2) Если легкие шарики – красные, то левая чашка будет на 1 грамм легче правой.

3) Если легкие шарики – синие, то левая чашка будет на 2 грамма легче правой.

4) Если легкие шарики – желтые, то левая чашка будет на 1 грамм тяжелее правой.

5) Если легкие шарики – зеленые, то левая чашка будет на 2 грамма тяжелее правой.

Как видно, пяти возможным вариантам соответствуют различные состояния весов, что позволяет однозначно определить, какая пара шариков легче.

4. Назовем сумму площадей красных прямоугольников красной площадью, а сумму площадей синих прямоугольников – синей площадью.

Заметим, что перемещение секущих плоскостей параллельно граням куба изменяет красную и синюю площади на одну и ту же величину (см. рис.1, на котором изображена развертка двух соседних граней куба).

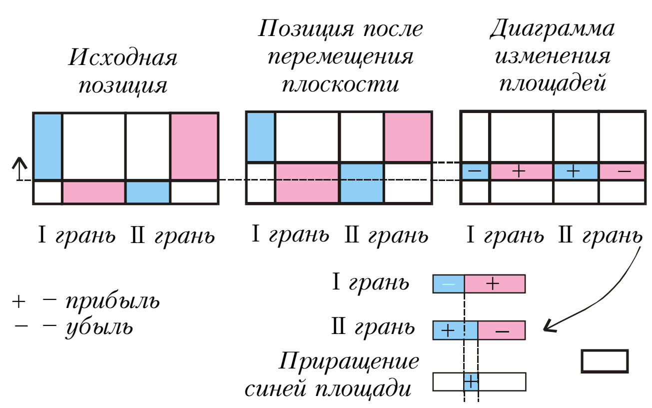

Рис. 1

Если провести секущие плоскости через центр куба, то все закрашенные прямоугольники превратятся в равные квадраты (рис.2) и красная площадь станет равной синей площади. Следовательно, это свойство равенства площадей будет выполняться и для любого начального положения секущих плоскостей.

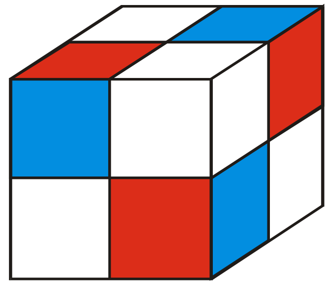

Рис. 2

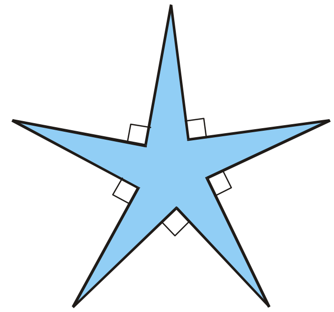

Рис. 3

5. См., например, рис.3.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №5 за 1999 г.)

6. Докажем, что сумма невычеркнутых чисел не может быть простым числом. Пусть несколько строк и столбцов вычеркнуты. Тогда оставшиеся числа представляют собой всевозможные попарные произведения номеров невычеркнутых столбцов. Но сумма этих попарных произведений, очевидно, равна произведению суммы номеров невычеркнутых строк на сумму номеров невычеркнутых столбцов, т.е. произведению двух чисел, каждое из которых заведомо не меньше 2. Поэтому она не может быть простым числом.

Что касается суммы вычеркнутых чисел, то она вполне может оказаться простым числом. Например, если зачеркнуть все числа строки под номером 3 и столбца под номером 5, то сумма вычеркнутых чисел будет равна 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21+ + 24 + 27 + 10 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 337 – простому числу.

7. Пусть AH – высота треугольника. Круг с диаметром AB (AC) полностью покрывает треугольник ABH (ACH). Следовательно, точка O лежит либо в круге с диаметром AB, либо в круге с диаметром AC. В первом случае расстояние от точки O хотя бы до одной из вершин A и B не превосходит $\frac{c}{\sqrt{2}}$, во втором – расстояние от точки O хотя бы до одной из вершин A и C не превосходит $\frac{b}{\sqrt{2}}$. Так как $b \ge c$, то утверждение задачи доказано.

8. Предположим противное: пусть $a + b \neq 0$. Обозначим $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = 2q$, где рациональное число $q \neq 0$, и пусть $\sqrt[3]{a} = q + \alpha$, где α – иррационально, тогда $\sqrt[3]{b} = q - \alpha$. Без ограничения общности можно считать $\alpha > 0$. Имеем $a + b = (q+\alpha)^3 + (q-\alpha)^3 = 6\alpha^2 q + 2q^3$, откуда $\alpha = \sqrt{r}$, где $r = \frac{a+b-2q^3}{6q}$. Но тогда число $a = \left(q+\sqrt{r}\right)^3 = q^3 + 3q^2\sqrt{r} + 3qr + r\sqrt{r} = q^3 + 3qr + \sqrt{r}\left(3q^2 + r\right)$ не может быть рациональным. Полученное противоречие говорит о том, что исходное предположение неверно. Следовательно, $a + b = 0$.

9. Прежде всего заметим, что число n четное. Если бы это было не так, то, отправляясь от какого-либо фиксированного числа и идя от числа к числу по кругу, мы сделаем нечетное количество шагов. При этом суммарное приращение величины окажется ненулевым, чего быть не может.

Назовем декрементом разность между суммой всех значительных чисел и суммой всех незначительных чисел. Первоначально декремент равен $S = M - m$. Элементарной операцией назовем вычеркивание наименьшего из незначительных чисел и соседнего с ним числа, считая по часовой стрелке. В результате применения элементарной операции к множеству из $n \ge 4$ чисел его структура не изменится: по-прежнему каждые