

полный путь, пройденный телом, составляет 24 м, а коэффициент трения равен 0,2. Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

10. Два баллона соединены между собой трубкой с краном. В одном баллоне находится газ массой 2 г под давлением 100 кПа, в другом – такой же газ массой 4 г под давлением 400 кПа. Какое давление (в кПа) установится в баллонах, если открыть кран? Температуры газов в баллонах одинаковы.

11. Полезная мощность батареи равна 6 Вт при двух значениях тока в цепи: 2 А и 6 А. Чему равна максимальная полезная мощность этой батареи?

12. На шарик массой 5 г нанесли заряд 2 мКл, подвесили его на нити длиной 10 м в горизонтальном магнитном поле, отклонили на угол α ($\cos \alpha = 0,28$) в плоскости, перпендикулярной полю, и отпустили. При прохождении грузом нижней точки натяжение нити оказалось равным 170 мН. Определите величину магнитной индукции. Считать $g = 10 \text{ м/с}^2$.

*Публикацию подготовили
Б.Писаревский, А.Черноуцан*

Санкт-Петербургский
государственный технический
университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{2}{a - 2\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

2. Вычислите $3^{\log_2 5} \cdot 5^{-\log_2 3}$.

3. Число 12 составляет 45% числа n .
Найдите 30% числа n .

4. Вычислите $\cos^2 120^\circ - \sin 210^\circ$.

5. Решите уравнение
 $2 \cdot 3^{-x} - 3^{|x|} = 3^{x+1}$.

6. Решите уравнение
 $\log_3(x - 6) \cdot \log_x 9 = 1$.

7. Решите уравнение
 $\sqrt{x} = \frac{2 - x^2}{\sqrt{x}}$.

8. Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что $\cos \alpha < 0$ и что $\sin 2\alpha = \cos \alpha$.

9. Вычислите
 $\arctg(\sqrt{5} + 2) - \arctg(2 - \sqrt{5})$.

10. Решите неравенство $x + 1 > x^3 + x^2$.

11. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x}}{x+2} \geq 0$.

12. Найдите область определения функции

$$y = \log_2(x + 1)^2 + \sqrt{2 + x}.$$

13. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{2x^2 + 2x + 2}{2x^2 + 2x + 1}.$$

14. Найдите уравнения осей симметрии графика функции $y = \cos 2x$.

15. Найдите такие векторы, которые с векторами $\vec{a}(-1; -2)$ и $\vec{b}(2; 1)$ составляют треугольник.

16. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 2(a-1)x + 3a = 0$ имеет два корня, являющихся целыми числами?

17. Первый член возрастающей арифметической прогрессии $a_1 = -3$; известно, что для всех ее членов, начиная со второго, выполнены равенства $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 4$. Найдите четвертый член прогрессии.

18. Решите уравнение $\sin x \sin 5x = 1$.

19. Окружность пересекает основание прямоугольника и касается прямых, на которых лежат три другие стороны прямоугольника. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что длина основания равна 10, а его отрезок заключенный внутри окружности, равен 8.

20. Каким должен быть радиус основания конуса, чтобы объем конуса был наибольшим, если известно, что сумма длин радиуса и образующей конуса равна 10?

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{a - a^{-1}}{1 + a^{-1}} - \frac{a - a^{-1}}{1 - a^{-1}}.$$

2. Вычислите $(\log_{\sqrt{2}} 9)(\log_8 3)^{-1}$.

3. Произведение двух чисел увеличилось на 80% после того, как первый сомножитель увеличили на 50%, а второй сомножитель изменили на $A\%$. Найдите A .

4. Упростите выражение

$$\frac{1 + \cos 250^\circ}{\sin 35^\circ \cos 55^\circ}.$$

5. Решите уравнение $\sqrt{x+1} = x\sqrt{2}$.

6. Найдите сумму решений уравнения $|4x - 4| = x^2$.

7. Решите уравнение

$$4^{4-x} \log_2 x = 2^x \log_4 x.$$

8. Найдите натуральные n , для которых

$(\text{НОД}(n, 4))^2 = n$
(НОД($n, 4$)) – наибольший общий делитель чисел n и 4).

9. Найдите наименьшее целое значение n , при котором 9π является периодом функции

$$y = \cos x \cos \frac{3x}{n}.$$

10. Найдите $\cos 3\alpha$, если известно, что

$$2 \cos 2\alpha = -1 \text{ и } |\alpha| \leq \frac{\pi}{2}.$$

11. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}.$$

12. Решите неравенство $\frac{1}{2 - |x|} > 1$.

13. Сумма третьего и пятого членов возрастающей геометрической прогрессии равна 8, а разность между пятым и первым ее членами равна 4. Найдите знаменатель прогрессии.

14. Решите неравенство

$$\frac{x^3 + 3x^2}{1 + x} \leq 0.$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = -2x, \\ \sqrt{y} = x + 2. \end{cases}$$

16. Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \frac{2x}{x-1}.$$

17. Найдите множество значений функции

$$y = 4^x \cdot 2^{1-x^2}.$$

18. α , β и γ – углы треугольника. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 2$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2}$. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$.

19. Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в 3 раза меньше высоты. Найдите объем пирамиды, если известно, что длина высоты равна $\sqrt{3}$.

20. При каких значениях параметра p функция $y = 2 \sin x + p \sin 2x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

*Публикацию подготовили
С.Преображенский, Ю.Хватов*