

ложен на расстоянии  $d$  от собирающей линзы на ее главной оптической оси  $OO'$ . Фокусное расстояние линзы  $F < d$ . В некоторый момент времени линза начинает вращаться с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, проходящей через центр линзы и перпендикулярной  $OO'$  (рис.4). Найдите ускорение, которое приобретает изображение источника сразу после начала вращения линзы.

Публикацию подготовил С.Фомичев

Институт криптографии, связи  
и информатики  
Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет прикладной математики)

1. Найдите все действительные корни алгебраического уравнения

$$(3x + 5) \left( \frac{1}{2}x + 1 \right)^2 (3x + 7) = \frac{1}{3}.$$

2. В течение двух лет добыча нефти на скважине уменьшается ежегодно на один и тот же процент в сравнении с объемом добычи предыдущего года. За первый год она сократилась более чем вдвое, а падение добычи за второй год в 7,2 раза меньше исходного годового объема добычи. На сколько процентов ежегодно сокращалось производство нефти на скважине?

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$5 + 2 \sin x + 8 \cos x + \sin 2x + 3 \cos 2x = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 8) + 2\sqrt{\log_2(x^2 - 2x + 8)} \geq 12.$$

5. На стороне  $AM$  треугольника  $AMD$  выбрана точка  $B$ , а на стороне  $MD$  выбрана точка  $C$  так, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной окружности, а прямые  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $N$ . При этом известно, что  $\angle AMD = 60^\circ$ ,  $AD = 2BC$ ,  $S_{ABD} = 2S_{ACD}$ . Найдите величину угла  $\angle ANB$ .

Вариант 2

(факультет информационной безопасности)

1. Найдите все действительные корни алгебраического уравнения

$$(10x - 5)^2(10x - 4)(10x - 6) = 72.$$

2. В течение первых двух лет обучения одного набора слушателей в Академии процент отчисляемых на первом и втором курсах был одинаковым. Число слушателей, переведенных на третий курс, отличается от числа слушателей, переведенных на второй курс, на 20 человек. Всего на первый курс данного набора было принято 441 человек. Сколько слушателей переведено на третий курс, если известно, что их было более 100 человек?

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x = \cos x + \cos 2x.$$

4. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AD$  перпендикулярна основаниям и равна 9,  $CD = 12$ , а отрезок  $AO$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найдите  $\angle AOB$ .

5. Считая  $x$ ,  $y$  целыми числами, решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_4(\sqrt{y} + 1) \log_{(y-2)^2}(x+1) + \log_{(y-2)^2} 3 = 0, \\ 4^{x+y} - 256 \cdot 2^{x+y} + 16384 = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

(факультет специальной техники)

1. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготавливают творог жирностью 15,5%, при этом остается сыворотка жирностью 0,5%. Сколько творога получится из одной тонны молока?

2. Решите неравенство

$$\lg x^{\sqrt{x-1}} + 1 > \lg x + \sqrt{x-1}.$$

3. В трапеции  $CDEF$  ( $CF \parallel DE$ ) диагонали  $DF$  и  $CE$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $B$ . Известно, что  $CD = 37$ ,  $BF = 84$ , а радиус окружности, вписанной в треугольник  $BFC$ , равен 14. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $DEB$ .

4. Решите уравнение

$$\sin(\pi x) = \cos \frac{\pi}{x}.$$

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$144^{-|2x-1|} - 2 \cdot 12^{-|2x-1|} + 12a = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет специальной техники)

1. Тело брошено с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту.

Найдите кинетическую энергию тела  $E_k$  спустя время  $t$  после начала движения. Массу тела  $m$ . Соппротивлением воздуха пренебречь.

2. По наклонной поверхности клина массой  $M$  с углом наклона  $\alpha$  втаскивают брусок массой  $m$ , действуя на него силой, параллельной поверхности клина (рис.1). Клин находится на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между бруском и клином  $\mu_1$ . Определите, при каких значениях

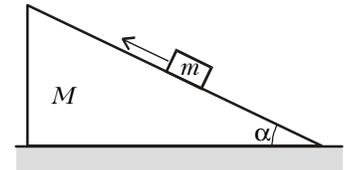


Рис. 1

коэффициента трения  $\mu_2$  между клином и горизонтальной плоскостью клин будет оставаться в покое. Массу бруска меньше массы клина.

3. Двум удаленным друг от друга металлическим шарам с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , соединенным длинным тонким проводником, сообщен заряд  $Q$ . Шар радиусом  $R_1$  находится внутри концентрической металлической заземленной сферы радиусом  $R_3 = 3R_1$ . Какой заряд  $q$  протечет по соединительному проводнику, если вдвое увеличить радиус шара  $R_2$ ?

4. В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым подвижным поршнем. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При одинаковой во всем цилиндре температуре объем нижней части цилиндра равен объему верхней части. Каким будет отношение  $n$  объемов верхней и нижней частей, если температуру газа увеличить в два раза?

5. Одна сторона замкнутого проводящего контура в форме квадрата изготовлена из проволоки с удельным сопротивлением  $\rho_1$ , три другие стороны — из проволоки с удельным сопротивлением  $\rho_2$ . Длина стороны квадрата  $L$ , поперечные сечения проволок одинаковы. Контур помещен в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости контура, а величина изменяется во времени по закону  $B = kt$ . Определите напряжение  $U$  между точками соединения разнородных проволок.

Вариант 2

(факультет прикладной математики)

1. С какой минимальной скоростью  $v_0$  следует бросить под углом  $\alpha$  к горизонту камень, чтобы он достиг высоты  $h$ ?