Если бы мы рассматривали не десятичную систему счисления, а систему счисления с основанием a, где a – отличное от единицы натуральное число, то аналогичным образом получили бы утверждение, которое называют теоремой Эйлера:

Если n – натуральное число, взаимно простое с целым числом a, где $a > 1$, то $a^{\varphi(n)} - 1$ кратно n. [10]

Чему равно $L(p^m)$?

Число 111 делится на 3. Далее, число

$$111111111 = 111 \cdot 1001001$$

делится на 9 как произведение двух чисел, каждое из которых делится на 3.[11] Записываемое 27 единицами число

$$111111111111111111111111111 =$$
$$= 111111111 \cdot 1000000001000000001$$

делится на 27 как произведение числа, кратного 9, и числа, кратного 3.

И вообще, равенство

$$\underbrace{111\ldots11}_{3^n}\underbrace{111\ldots11}_{3^n}\underbrace{111\ldots11}_{3^n} = \underbrace{111\ldots11}_{3^n} \cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}\underbrace{00\ldots001}_{3^n-1}$$

показывает, что если число, записываемое 3^n единицами, кратно 3^n, то число, записываемое 3^{n+1} единицами, кратно 3^{n+1}.

Таким образом по индукции можно доказать, что число $\underbrace{11\ldots11}_{3^n}$ кратно числу 3^n, т.е. число $\underbrace{99\ldots99}_{3^n}$ кратно числу 3^{n+2}, откуда $L(3^{n+2}) \le 3^n$. А если мы еще заметим, что использованные нами числа 100…00100…001 делятся только на 3, но не на 9, то получим точный результат: $L(3^{n+2}) = 3^n$.

Нельзя ли подобным образом изучить функцию $L(p^m)$, где p – простое число, m – натуральное число? Оказывается, можно.

Теорема 4. *Если p^k – наивысшая степень простого числа p, которой кратно число $10^{L(p)} - 1$, то для любого неотрицательного целого числа m верна формула $L(p^{k+m}) = p^m L(p)$. (Например, $L(3^{m+2}) = 3^m$ и $L(7^{m+1}) = 6 \cdot 7^m$.)*

Доказать теорему 4 вам поможет следующая лемма.

Лемма 2. *Если $a = 1 + px$, где p – простое число, $p > 2$, x – целое число, то сумма $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$ кратна p, но не кратна p^2.*

Доказательство леммы 2. Легко понять (рассуждая по индукции или применив бином Ньютона), что при делении на p^2 числа a, a^2, …, a^{p-2} и a^{p-1} дают такие же остатки, как $1 + px$, $1 + 2px$, …, $1 + (p-2)px$ и $1 + (p-1)px$. Следовательно,

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-2} + a^{p-1} \equiv$$
$$\equiv 1 + (1 + px) + (1 + 2px) + \ldots$$
$$\ldots + (1 + (p-2)px) + (1 + (p-1)px) =$$
$$= p + px\frac{p(p-1)}{2} \equiv p \pmod{p^2}.$$

Лемма доказана. А теорему докажите в качестве (трудного, но не слишком) упражнения (29).

Упражнения

26. Число $10^{3^n} - 1$ кратно 3^{n+2}, но не кратно 3^{n+3}. Докажите это.

27. Какое наименьшее количество единиц подряд надо написать, чтобы получилось число, кратное а) 999 999 999; б) 9^9; в) 11^{11}; г) $3^k 7^l$, где k, l – натуральные числа?

28. На какую наибольшую степень двойки делится число $5^{2000} - 1$?

29. Докажите теорему 4.

30. Докажите, что если p – простое число, $p \ne 2$, то сумма $1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$ не кратна p^2 ни для какого целого числа a.

31. Докажите, что в периоде бесконечной десятичной дроби $1/3^{100}$ имеется любая последовательность из 46 цифр. (Чуть в иной формулировке эта задача была в «Задачнике «Кванта» под номером М1280.)

32 (для тех, кто любит программировать)**.** а) Найдите хотя бы одно такое простое число $p > 5$, что длины периодов разложений в десятичные дроби чисел $1/p$ и $1/p^2$ совпадают и равны $p - 1$. б*) Найдите еще одно такое простое число. (Неизвестно, бесконечно ли множество простых чисел со свойством $L(p) = L(p^2)$. Неизвестно и то, существует ли хотя бы одно простое число $p > 5$, для которого $L(p) = L(p^3)$.)

[10] *Честно говоря, условие $a > 1$ излишне: если нас интересуют остатки от деления на n, то из любого целого числа a, прибавив к нему n необходимое количество раз, можно получить число, большее единицы.*

[11] *Впрочем, можно было воспользоваться признаком делимости на 9.*

НАМ ПИШУТ

Заглянем в центр звезд

Просматривая таблицу «Физические параметры некоторых звезд» (которая частично здесь приводится) из «Справочника по физике» А.С.Еноховича, трудно удержаться от попытки оценить температуру в центрах звезд и сравнить ее с реальной.

Будем считать, в первом приближении, звезду водородной. Поскольку она находится в равновесии, разумно приравнять, по порядку величины, средние энергии протона – теплового движения и гравитационного взаимодействия: $kT \sim GMm_p/d$. Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура звезды, G – гравитационная постоянная, M и d – масса и диаметр звезды, m_p – масса протона. Имеем расчетную формулу $T \sim \frac{GMm_p}{kd}$, на основании которой строим пятую графу таблицы. Сравнив ее со второй графой, видим достаточно хорошее совпадение.

Звезда	T, K	d (по сравнению с Солнцем)	M (по сравнению с Солнцем)	Вычисленная температура, K
τ Ориона	$5{,}4 \cdot 10^7$	7	27	$4{,}47 \cdot 10^7$
Спика (αДевы)	$3 \cdot 10^7$	5	11	$2{,}55 \cdot 10^7$
Вега (αЛиры)	$1{,}8 \cdot 10^7$	2,2	2,8	$1{,}48 \cdot 10^7$
Процион А	$8 \cdot 10^6$	1,8	1,2	$7{,}73 \cdot 10^6$
α Центавра А	$1{,}3 \cdot 10^7$	1,0	1,0	$1{,}16 \cdot 10^7$
ξ Волопаса В	$1{,}0 \cdot 10^7$	0,65	0,58	$1{,}03 \cdot 10^7$
Крюгер 60 А	$8{,}5 \cdot 10^6$	0,41	0,30	$8{,}48 \cdot 10^6$

В.Дроздов