Если бы мы рассматривали не десятичную систему счисления, а систему счисления с основанием $a$, где $a$ – отличное от единицы натуральное число, то аналогичным образом получили бы утверждение, которое называют теоремой Эйлера:

*Если $n$ – натуральное число, взаимно простое с целым числом $a$, где $a > 1$, то $a^{\varphi(n)} - 1$ кратно $n$.* [10]

## Чему равно $L(p^m)$?

Число 111 делится на 3. Далее, число

$$111111111 = 111 \cdot 1001001$$

делится на 9 как произведение двух чисел, каждое из которых делится на 3.[11] Записываемое 27 единицами число

$$111111111111111111111111111 =$$
$$= 111111111 \cdot 1000000001000000001$$

делится на 27 как произведение числа, кратного 9, и числа, кратного 3.

И вообще, равенство

$$\underbrace{111\ldots11}_{3^n}\underbrace{111\ldots11}_{3^n}\underbrace{111\ldots11}_{3^n} = \underbrace{111\ldots11}_{3^n} \cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}\underbrace{00\ldots001}_{3^n-1}$$

показывает, что если число, записываемое $3^n$ единицами, кратно $3^n$, то число, записываемое $3^{n+1}$ единицами, кратно $3^{n+1}$.

[10] *Честно говоря, условие $a > 1$ излишне: если нас интересуют остатки от деления на $n$, то из любого целого числа $a$, прибавив к нему $n$ необходимое количество раз, можно получить число, большее единицы.*

[11] *Впрочем, можно было воспользоваться признаком делимости на 9.*

Таким образом по индукции можно доказать, что число $\underbrace{11\ldots11}_{3^n}$ кратно числу $3^n$, т.е. число $\underbrace{99\ldots99}_{3^n}$ кратно числу $3^{n+2}$, откуда $L(3^{n+2}) \le 3^n$. А если мы еще заметим, что использованные нами числа 100…00100…001 делятся только на 3, но не на 9, то получим точный результат: $L(3^{n+2}) = 3^n$.

Нельзя ли подобным образом изучить функцию $L(p^m)$, где $p$ – простое число, $m$ – натуральное число? Оказывается, можно.

**Теорема 4.** *Если $p^k$ – наивысшая степень простого числа $p$, которой кратно число $10^{L(p)} - 1$, то для любого неотрицательного целого числа $m$ верна формула $L(p^{k+m}) = p^m L(p)$. (Например, $L(3^{m+2}) = 3^m$ и $L(7^{m+1}) = 6 \cdot 7^m$.)*

Доказать теорему 4 вам поможет следующая лемма.

**Лемма 2.** *Если $a = 1 + px$, где $p$ – простое число, $p > 2$, $x$ – целое число, то сумма $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$ кратна $p$, но не кратна $p^2$.*

**Доказательство леммы 2.** Легко понять (рассуждая по индукции или применив бином Ньютона), что при делении на $p^2$ числа $a$, $a^2$, …, $a^{p-2}$ и $a^{p-1}$ дают такие же остатки, как $1 + px$, $1 + 2px$, …, $1 + (p-2)px$ и $1 + (p-1)px$. Следовательно,

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-2} + a^{p-1} \equiv$$
$$\equiv 1 + (1 + px) + (1 + 2px) + \ldots$$
$$\ldots + (1 + (p-2)px) + (1 + (p-1)px) =$$
$$= p + px\frac{p(p-1)}{2} \equiv p \pmod{p^2}.$$

Лемма доказана. А теорему докажите в качестве (трудного, но не слишком) упражнения (29).

**Упражнения**

**26.** Число $10^{3^n} - 1$ кратно $3^{n+2}$, но не кратно $3^{n+3}$. Докажите это.

**27.** Какое наименьшее количество единиц подряд надо написать, чтобы получилось число, кратное а) 999 999 999; б) $9^9$; в) $11^{11}$; г) $3^k 7^l$, где $k$, $l$ – натуральные числа?

**28.** На какую наибольшую степень двойки делится число $5^{2000} - 1$?

**29.** Докажите теорему 4.

**30.** Докажите, что если $p$ – простое число, $p \ne 2$, то сумма $1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$ не кратна $p^2$ ни для какого целого числа $a$.

**31.** Докажите, что в периоде бесконечной десятичной дроби $1/3^{100}$ имеется любая последовательность из 46 цифр. (Чуть в иной формулировке эта задача была в «Задачнике «Кванта» под номером М1280.)

**32** (для тех, кто любит программировать). а) Найдите хотя бы одно такое простое число $p > 5$, что длины периодов разложений в десятичные дроби чисел $1/p$ и $1/p^2$ совпадают и равны $p - 1$. б*) Найдите еще одно такое простое число. (Неизвестно, бесконечно ли множество простых чисел со свойством $L(p) = L(p^2)$. Неизвестно и то, существует ли хотя бы одно простое число $p > 5$, для которого $L(p) = L(p^3)$.)

# НАМ ПИШУТ

## Заглянем в центр звезд

Просматривая таблицу «Физические параметры некоторых звезд» (которая частично здесь приводится) из «Справочника по физике» А.С.Еноховича, трудно удержаться от попытки оценить температуру в центрах звезд и сравнить ее с реальной.

Будем считать, в первом приближении, звезду водородной. Поскольку она находится в равновесии, разумно приравнять, по порядку величины, средние энергии протона – теплового движения и гравитационного взаимодействия: $kT \sim GMm_p/d$. Здесь $k$ – постоянная Больцмана, $T$ – температура звезды, $G$ – гравитационная постоянная, $M$ и $d$ – масса и диаметр звезды, $m_p$ – масса протона. Имеем расчетную формулу $T \sim \frac{GMm_p}{kd}$, на основании которой строим пятую графу таблицы. Сравнив ее со второй графой, видим достаточно хорошее совпадение.

| Звезда | $T$, К | $d$ (по сравнению с Солнцем) | $M$ (по сравнению с Солнцем) | Вычисленная температура, К |
|---|---|---|---|---|
| τ Ориона | $5{,}4 \cdot 10^7$ | 7 | 27 | $4{,}47 \cdot 10^7$ |
| Спика (αДевы) | $3 \cdot 10^7$ | 5 | 11 | $2{,}55 \cdot 10^7$ |
| Вега (αЛиры) | $1{,}8 \cdot 10^7$ | 2,2 | 2,8 | $1{,}48 \cdot 10^7$ |
| Процион А | $8 \cdot 10^6$ | 1,8 | 1,2 | $7{,}73 \cdot 10^6$ |
| αЦентавра А | $1{,}3 \cdot 10^7$ | 1,0 | 1,0 | $1{,}16 \cdot 10^7$ |
| ξВолопаса В | $1{,}0 \cdot 10^7$ | 0,65 | 0,58 | $1{,}03 \cdot 10^7$ |
| Крюгер 60 А | $8{,}5 \cdot 10^6$ | 0,41 | 0,30 | $8{,}48 \cdot 10^6$ |

*В.Дроздов*