Числа вида 99...9

Взглянем на равенства $1/7 = 0,(142857)$ и $1/13 = 0,(076923)$. Заметьте:

$$142857 \cdot 7 = 999999$$

и

$$76923 \cdot 13 = 999999.$$

Это не случайность: как вы помните, в правиле преобразования чисто периодической дроби в обыкновенную фигурирует число $10^r - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{r}$. Поэтому мы займемся числами этого вида.

Лемма 1. *Для всякого натурального числа k, не кратного ни 2, ни 5, существует такое натуральное число r, для которого разность $10^r - 1$ кратна n.*

Доказательство. *Первый способ* – для любителей многоточий. Рассмотрим k чисел: 9, 99, 999, ..., $\underbrace{99\ldots9}_{k}$. Докажем, что хотя бы одно из них кратно k. Предположим противное: пусть ни одно из них не кратно k. Поскольку количество ненулевых остатков от деления на k равно $k-1$, какие-то два из k рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на k. Разность этих чисел нацело делится на k и представляет из себя несколько девяток, после которых написано несколько нулей:

$$\underbrace{99\ldots9}_{r+s} - \underbrace{99\ldots9}_{s} = \underbrace{99\ldots9}_{r}\underbrace{00\ldots0}_{s}.$$

Поскольку k взаимно просто с 10, из делимости числа $\underbrace{99\ldots9}_{r}\underbrace{00\ldots0}_{s}$ на k следует, что число $\underbrace{99\ldots9}_{r}$ нацело делится на k. Лемма доказана.

Второй способ – для тех, кто не любит многоточия. Рассмотрим числа 1, 10, 10^2, ..., 10^{k-1}. Ни одно из них не кратно k. Поскольку количество ненулевых остатков от деления на k равно $k-1$, какие-то два из k рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на k. Разность этих чисел:

$$10^{r+s} - 10^s,$$

где $0 \le s < r+s < k$, – нацело делится на k.

Из делимости произведения $10^s\left(10^r - 1\right)$ на k и из взаимной простоты чисел 10 и k следует, что $10^r - 1$ кратно k, т.е.

$$10^r - 1 = kt,$$

где t – натуральное число[5]. Доказательство завершено[6].

Упражнения

13. Сколько чисел, кратных 13, имеется среди первых ста чисел последовательности 1, 11, 111, ...?

14. Если число вида 11...1 кратно 7, то оно кратно и 11, и 13, и 15873. Докажите это.

15. Первую цифру k-значного числа, кратного 13, стерли и записали позади последней цифры этого числа. При каких k полученное число кратно 13? (Например, из кратных 13 чисел 503906 и 7969 таким образом получаем числа 39065 и 9697, первое из которых кратно 13, а второе – нет.)

16. Для каких пар натуральных чисел (m, n), где $n > 1$, число $1\underbrace{00\ldots0}_{m}1$ кратно числу $\underbrace{11\ldots1}_{n}$?

17. а) Если p – простое число и наименьший период десятичного разложения дроби $1/p$ состоит из $2n$ цифр, то сумма двух n-значных чисел (могущих начинаться и с нуля), образованных первыми n и последними n цифрами периода, равна $10^n - 1$. Докажите это. (Например, $1/13 = 0,(076923)$, при этом $76 + 923 = 999$. Простота знаменателя существенна: $1/21 = 0,(047619)$, но $47 + 619 \neq 999$.) б) Длина наименьшего периода десятичного представления дроби $1/p$, где p – простое число, четна в точности тогда, когда p является делителем некоторого числа вида $10^n + 1$. Докажите это.

18. а) Найдите длину наименьшего периода десятичного представления дроби $1/31$. б) Докажите, что никакое число вида 100...01 не кратно 31.

19 (М981). Докажите, что число 11...1 (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8; б) 128; в*) 1024 различных делителя.

Длина периода

Теорема 2. *Если m, n – взаимно простые натуральные числа, причем n взаимно просто с 10 и $m < n$, то в десятичном представлении дробь m/n является чисто периодической. Длина ее наименьшего периода – это такое наименьшее натуральное число r, что $10^r - 1$ кратно n.*

Доказательство. По лемме 1, $10^r - 1 = kt$ для некоторых натуральных чисел r и t. Следовательно,

$$\frac{m}{k} = \frac{mt}{kt} = mt \cdot \frac{1}{10^r - 1}.$$

Воспользовавшись равенством $1/(10^r - 1) = 0,(\underbrace{00\ldots0}_{r-1}1)$, получаем

$$\frac{m}{k} = mt \cdot 0,(\underbrace{00\ldots0}_{r-1}1).$$

Поскольку $m < k$, то $mt < kt < 10^r$, так что произведение числа mt на число $0,(\underbrace{00\ldots0}_{r-1}1)$ – это периодическая дробь, длина периода которой равна r, а период – десятичная запись числа mt, возможно, дополненная слева необходимым количеством нулей.

Нам осталось только понять, почему *наименьшему* возможному числу r соответствует наименьший возможный период. Но это сразу ясно из правила перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Теорема 2 доказана. Она вполне ясно характеризует длину r периода чисто периодической десятичной дроби. А если есть предпериод, то надо вспомнить равенство

$$\frac{m}{2^a 5^b k} = \frac{m \cdot 2^{c-a} 5^{c-b}}{k} : 10^c,$$

и ответ станет очевиден:

Следствие теоремы 2. *Длиной наименьшего периода десятичного представления несократимой дроби m/n, где $n = 2^a 5^b k$, $a, b \ge 0$ и НОД$(k, 10) = 1$, является такое наименьшее натуральное число r, что $10^r - 1$ кратно k.*

Следствие следствия теоремы 2. *Длина наименьшего периода десятичного представления несократимой дроби m/n зависит только от знаменателя n, а не от числителя m.*

Функция $L(n)$

Обозначим через $L(n)$ длину наименьшего периода десятичного представления дроби $1/n$ (см. таблицу 1). В силу следствия теоремы 2, если $n = 2^a 5^b k$, где $a, b \ge 0$ и НОД$(k, 10) = 1$, то $L(n) = L(k) = r$, где r – это наименьшее натуральное число, для которого $10^r - 1$ кратно k.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$L(n)$	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	2	1	6	6	1	1	16

Функция L определена на всем множестве натуральных чисел[7], но в дей-

[5] *Например, для $k = 7$ можно взять $r = 6$; при этом $t = (10^6 - 1)/7 = 142857$.*

[6] *Между прочим, оно замечательно не только отсутствием многоточий, но и тем, что показывает: существует нужное нам число $r < k$, а не только $r \le k$.*

[7] *Напоминаем, что в доказательстве теоремы 1 мы договорились периодом конечной десятичной дроби считать число 1.*