частное 4 и остаток 2, затем будем делить 20 на 7, и так далее:

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots$$

Обычно этот результат записывают короче:

$$\frac{3}{7} = 0{,}(428571),$$

т.е. заключают повторяющуюся группу цифр в скобки и говорят: «428571 в периоде»[4].

Если повторяющаяся группа цифр (период) расположена непосредственно после запятой, то такую десятичную дробь называют *чисто периодической*; в противном случае говорят, что дробь имеет *предпериод* и называют ее *смешанной периодической.*

Теорема 1. *Десятичное представление дроби m/n, где m, n – натуральные числа, $m < n$, – периодическая дробь, длина наименьшего периода которой не превосходит $n - 1$.*

Доказательство. Чтобы получить первую цифру после запятой, мы приписываем к m нуль (т.е. умножаем m на 10) и делим (с остатком) полученное число на n. Вообще весь процесс деления уголком – повторяемое вновь и вновь умножение очередного остатка на 10 и деление (с остатком) на n.

Если на каком-то шаге получится нулевой остаток, то дробь – конечная. Конечную дробь, приписав к ней справа бесконечно много нулей, естественно считать периодической с периодом длины 1. По условию, $1 \le n - 1$, так что в этом случае утверждение теоремы выполнено.

Если же процесс деления никогда не закончится, то будут получаться только ненулевые остатки, т.е. числа от 1 до $n - 1$. Значит, не позже чем на n-м шаге остаток повторится. С этого момента процесс деления зациклится, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Убедитесь, что а) $1/3 = 0{,}(3)$; б) $1/6 = 0{,}1(6)$; в) $7/30 = 0{,}2(3)$; г) $7/11 = 0{,}(63)$.

2. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

3. Разделите «уголком» число 1 на а) 9; б) 99; в) 9999999. г) Докажите общее правило: $1/\underbrace{99\ldots9}_{n} = 0{,}\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1$.

[4] *Существуют и непериодические дроби, например, десятичная дробь 0,1010010001…, где количество нулей между единицами все время увеличивается на 1. Но в этой статье они никак не будут использованы.*

4. Проверьте равенства а) $0{,}(6) + 0{,}(5) = 1{,}(2)$; б) $0{,}(845) + 0{,}(49) = 1{,}(340795)$; в) $2{,}70(584) + 6{,}917(49) = 9{,}623(340795)$.

От периодической десятичной дроби – к обыкновенной

Пусть

$$x = 0{,}11111\ldots$$

Тогда

$$10x = 1{,}1111\ldots,$$

откуда

$$10x = 1 + x,$$

т.е. $x = 1/9$. Мы получили замечательный результат:

$$0{,}11111\ldots = 1/9.$$

Это равенство не приближенное, а *точное*: бесконечная десятичная периодическая дробь 0,(1) является в точности тем же самым числом, что и обыкновенная дробь $1/9$. (Между прочим, равенство $0{,}999\ldots = 1$ тоже абсолютно точное!)

Далее, пусть

$$y = 0{,}17331733173317331733\ldots$$

Тогда

$$10000y = 1733{,}1733173317331733\ldots,$$

откуда

$$10000y = 1733 + 0{,}1733173317331733\ldots = 1733 + y.$$

Из уравнения

$$10000y = 1733 + y$$

находим

$$9999y = 1733, \text{ т.е. } y = 1733/9999.$$

Если провести вычисления не для частных примеров, как это сделали мы, а в общем виде, то можно установить следующее правило:

Чисто периодическая правильная дробь равна такой обыкновенной дроби, в числителе которой – период, а в знаменателе – число $10^r - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{r}$, где r – длина периода.

Упражнения

5. Обратите в десятичные дроби числа а) $23/99$; б) $1234/999999$.

6. Обратите в обыкновенные дроби числа а) 0,(012); б) 3,1(3); в) 1,93(173).

7. Сумма (произведение, разность) двух периодических десятичных дробей – периодическая дробь. Докажите это.

8. Дана бесконечная десятичная непериодическая дробь. Докажите, что ее цифры можно переставить так, что получится периодическая дробь.

Предпериод

Если делить «уголком» 3 на 14, то зацикливание произойдет не сразу:

$$3/14 = 0{,}2(142857).$$

Период, заметим, такой же, как у дроби $1/7$. Это легко объяснить:

$$\frac{3}{14} = \frac{30}{14} : 10 = \frac{15}{7} : 10 = \left(2 + \frac{1}{7}\right) : 10,$$

а делить на 10 очень легко – достаточно перенести запятую на одну позицию.

В общем случае выделим в знаменателе степени двойки и пятерки, т. е. запишем дробь в виде $m\Big/\left(2^a 5^b k\right)$, где a, b – неотрицательные целые числа, k – натуральное число, не кратное ни 2, ни 5. Обозначим наибольшее из чисел a, b буквой c и выполним преобразование:

$$\frac{m}{2^a 5^b k} = \frac{m \cdot 2^c \cdot 5^c}{2^a 5^b k} : 10^c = \frac{m \cdot 2^{c-a} 5^{c-b}}{k} : 10^c.$$

Значит, для решения вопроса о длинах периодов десятичных дробей достаточно изучить дроби со знаменателями, не кратными ни 2, ни 5 (т.е. со знаменателями, взаимно простыми с числом 10).

Упражнения

9. Зная, что $1/13 = 0{,}(076923)$, запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую дробь 0,(692307).

10. Зная, что $7/17 = 0{,}(4117647058823529)$, обратите в десятичные дроби числа а) $12/85$; б) $3/68$.

11*. а) Докажите, что длина наименьшего предпериода десятичного представления правильной несократимой дроби со знаменателем $n = 2^a 5^b k$, где a, b, k – целые неотрицательные числа, причем НОД$(k,10) = 1$, равна $c = \max(a,b)$.

б) Докажите неравенство $c \le \log_2 n$ и убедитесь, что равенство достигается для чисел вида $n = 2^a$ и только для них.

в) Пусть хотя бы один делитель натурального числа n отличен от 2 и 5. Докажите неравенство $c \le \log_2(n/3)$ и убедитесь, что равенство достигается для чисел вида $n = 3 \cdot 2^a$ и только для них.

12*. Докажите, что если в периоде десятичного представления дроби m/n, где m и n – натуральные числа, встретилась последовательность цифр 167, то $n > 100$.