Назовем число значительным, если оба соседа меньше его; сумма всех значительных чисел равна M. Назовем число незначительным, если оба его соседа больше его; сумма всех незначительных чисел равна m. Докажите равенство $n = 2(M - m)$.

(В.Произволов)

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли, соответственно, точки K и L, а на стороне AC — точки M и N так, что KL параллельно AC, $AK = KM$, $NL = LC$. Докажите, что $AC \perp BP$, где P — точка пересечения прямых KM и LN.

(С.Волченков)

Решения

4. Занумеруем окопы слева направо числами от 1 до 1000. Предположим сначала, что в момент первого выстрела пехотинец сидит в окопе с нечетным номером. Пусть пушка выстрелит в окоп номер 1. Если не попала, то пехотинец перешел в окоп с четным номером. Выстрелим во второй окоп. Если не попали, то пехотинец перешел в окоп с нечетным номером, не меньшим 3. Выстрелим в окоп номер 3, и так далее. Оттесняя пехотинца, мы таким образом поразим его.

Если же вначале пехотинец находился в окопе с четным номером, то после тысячного выстрела он находится в окопе с четным номером. Теперь опять стреляем в 1000-й окоп, а потом в 999-й, 998-й,…, 1-й.

5. Выпишем n пар соседних чисел и в каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Сложим эти разности. С одной стороны, эта сумма равна n, так как каждая разность равна 1. С другой стороны, каждое значительное число войдет в две разности со знаками плюс, каждое незначительное — со знаками минус, а все остальные — по одному разу с каждым знаком. Значит, $n = 2M - 2m$.

6. *Указание.* Треугольники LKB и LKP (рис.6) симметричны относительно прямой LK.

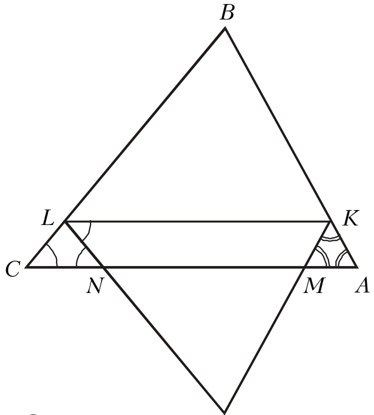

Рис.6

Еще несколько задач

7. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

(И.Акулич)

8. В конференции участвовали 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?». Когда опросили 51 участника и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

(А.Шаповалов)

9. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике — 50, по информатике — 48. Когда учеников опросили, в скольких олимпиадах они участвовали, ответ «в двух» дали вдвое меньше человек, чем ответ «в одной», а ответ «в трех» — втрое меньше, чем ответ «в одной». Сколько всего учеников участвовали в этих олимпиадах?

(А.Шаповалов)

10. Можно ли на поверхность куба наклеить без наложения прямоугольник так, чтобы он закрыл половину каждой грани?

(Д.Калинин)

11. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ферзи по следующим правилам: каждым ходом на доску устанавливается один ферзь, и, если он кого-либо побил, то один из побитых им ферзей снимается с доски. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске с соблюдением этих условий?

(И.Акулич)

12. На каждой стороне треугольника отметили по точке и соединили эти точки отрезками, тем самым разбив треугольник на четыре меньших треугольника. Все четыре оказались подобны друг другу. Обязательно ли эти четыре треугольника равны между собой?

(А.Шаповалов)

13. Строки и столбцы таблицы размером 9×9 занумеровали числами от 2 до 10 и в каждую клетку вписали произведение номера ее строки на номер ее столбца. Затем несколько строк и столбцов вычеркнули. Может ли сумма оставшихся чисел оказаться простым числом?

(И.Акулич)

14. Из 1998 дробей $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1998}$ составили всевозможные произведения по три. Затем эти произведения просуммировали, привели к общему знаменателю и полученную дробь преобразовали к несократимому виду. Докажите, что числитель полученной дроби кратен 1999. (*Указание*. Число 1999 — простое.)

(И.Акулич)

15. Числами от 1 до 100 сверху вниз пронумеровали 100 карточек в стопке. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или по нескольку карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение номеров всех карточек станет кратно 1000000. Кто из игроков может гарантировать себе выигрыш?

(А.Шаповалов)

16. Ветка кустарника (рис. 7) имеет один лист сверху и, кроме того, n пар листьев (листья одной пары растут из одной точки стебля). Двое по очереди срывают листья. За один ход можно сорвать либо один любой лист, либо

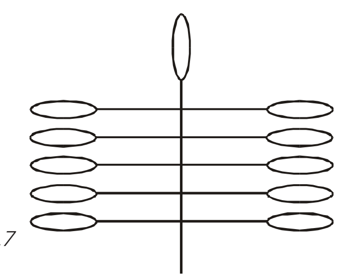
Рис.7

любую пару листьев, растущих из одной точки. Выигрывает тот, кто сорвет последний лист. При каких n побеждает начинающий, а при каких — его противник, если оба играют наилучшим образом?

(И.Акулич)

Заключение

Отметим, что успешным своим проведением конкурс обязан Управлению по делам образования и молодежи г. Рыбинска. Особой благодарности заслуживают заместитель главы администрации Рыбинского муниципального округа А.И.Брянкин и руководитель Рыбинского филиала Ярославской областной заочной математической школы А.Н.Морозов. Книги для призов победителям были предоставлены Московским институтом развития образовательных систем и журналом «Квант».

А.Спивак, С.Токарев