Дипломами второй степени награждены команды Москвы (А.Н.Карпов) и Харькова (Е.Л.Аринкина и А.Л.Берштейн). Дипломы третьей степени получили команды Рыбинска (Т.И.Михайлова) и Ярославля (С.Г.Волченков). Команды Чебоксар (А.В.Монов) и Астрахани (А.В.Забалуева и С.С.Тасмуратов) награждены дипломами «За успешное участие».

Познакомимся с некоторыми задачами турнира.

Личная олимпиада

Задачи

1. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $BM = BC$ и $AN = AC$ (рис.1). Затем на катетах BC и AC отметили, соответственно, точки P и Q так, что $BP = BN$ и $AQ = AM$.

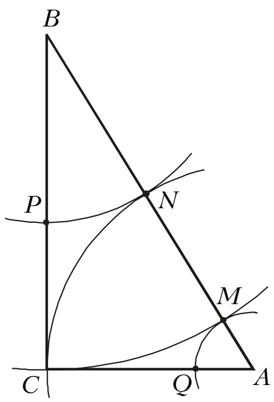

Рис. 1

Докажите, что точки C, Q, M, N, P лежат на одной окружности.

(В.Произволов)

2. Можно ли куб размером $2\times2\times2$ оклеить в один слой четырьмя одинаковыми развертками куба $1\times1\times1$?

(С.Токарев)

3. Три мухи в полдень сели на секундную, минутную и часовую стрелки часов и поехали на них. Когда какая-то стрелка обгоняла другую, сидящие на этих стрелках мухи менялись местами (а если бы секундная стрелка обогнала часовую и минутную стрелки одновременно, то местами поменялись бы мухи с секундной и часовой). Сколько кругов проехала каждая из мух до полуночи?

(С.Волченков)

Решения

1. $CMNP$ – равнобокая трапеция; вокруг нее можно описать окружность. Аналогично, $CQMN$ – равнобокая трапеция, тоже вписанная в окружность. Эти две окружности имеют три общие точки: C, M и N. Три точки однозначно задают окружность – следовательно, рассматриваемые окружности совпадают. Все сделано!

Отметим, что несколько лет назад М. Евдокимов придумал такую задачу: *если вписать в прямоугольный треугольник ABC окружность и опустить на гипотенузу и катеты перпендикуляры (рис.2), то основания этих перпендикуляров Q, M, N, P и вершина C прямого угла лежат на одной окружности.* (Хотите знать решение? Все точки, из которых данная окружность видна под углом 90°, лежат на окружности с тем же центром и в $\sqrt{2}$ раз большим радиусом.) Задача 1 – великолепная переформулировка задачи Евдокимова.

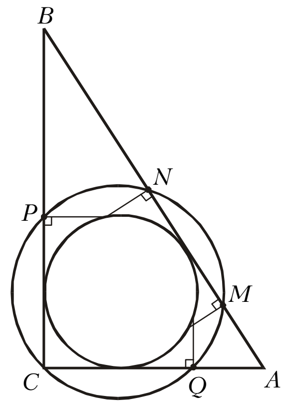

Рис. 2

2. Эта задача сложна для проверки: почти у каждого решившего задачу – своя развертка куба $2\times2\times2$ и свой способ разрезания на четыре развертки куба $1\times1\times1$. На рисунках 3 и 4 показаны два способа, предложенные школьниками. Попытайтесь их проверить – скорее всего, как и у нас, воображение откажет. Тогда придется резать бумагу и складывать кубик! (Кстати, можете сказать, это по сути разные способы или одинаковые?)

А теперь – оцените авторское решение (рис.5)!

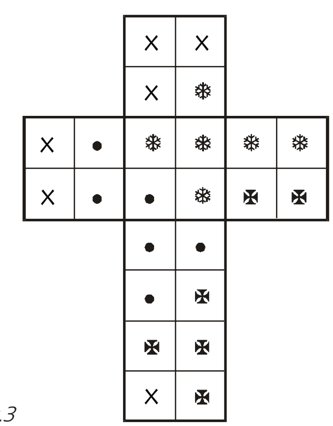

Рис.3

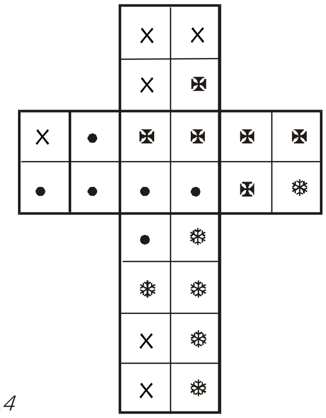

Рис.4

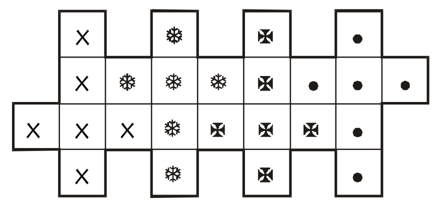

Рис.5

3. Эту задачу никто не решил, хотя один участник олимпиады неведомым жюри способом получил правильный ответ, не сумев его обосновать. (Забегая вперед, отметим, что каждая из остальных задач турнира была решена хотя бы одним школьником.)

Идея решения истинно олимпиадная: мухи не перегоняют одна другую. Значит, никакая муха не может обогнать никакую другую более чем на один оборот. Поэтому количества оборотов, сделанных мухами, не могут отличаться более чем на единицу.

Часовая стрелка делает за 12 часов один оборот, минутная – 12, секундная – 720; три мухи вместе сделают $1 + 12 + 720 = 733$ оборота. Осталось представить число 733 в виде суммы трех натуральных чисел, отличающихся не более чем на единицу: $733 = 244 + 244 + 245$. Это и есть ответ: мухи, начавшие свой путь на часовой и минутной стрелках, сделали по 244 оборота, а третья муха – 245.

Командные соревнования (математические бои)

Задачи

4. В одном из 1000 окопов, расположенных в ряд, спрятался пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом накрыть любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка попасть в пехотинца?

(А.Шаповалов, В.Шорин)

5. По кругу написаны n натуральных чисел, при этом каждые два соседних числа отличаются на 1.