Ф1728. Источник света движется равномерно вдоль прямой со скоростью $v = 0{,}2\,c$, где c – скорость света. На расстоянии d от этой прямой находится наблюдатель. Запаздывание пришедшего к наблюдателю света приводит к тому, что движение источника кажется ему неравномерным. Каким будет максимальное наблюдаемое ускорение источника света?

В.Шелест

Ф1729. На гладком горизонтальном столе происходит лобовой удар двух одинаковых тел – одно из них вначале покоится, другое налетает на него со скоростью v_0. Куда и с какой скоростью будет двигаться после удара налетевшее тело, если при ударе в тепло переходит 1% от максимальной энергии деформации тел?

Р.Александров

Ф1730. В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью $S = 1$ м^2 под поршнем, находящимся на высоте $h = 1$ м, содержится $N = 100$ одинаковых шариков диаметром $d = 0{,}1$ мм. Шарики хаотически двигаются, средняя квадратичная скорость шарика $v_0 = 100$ м/с. Поршень начинают двигать со скоростью $u = 1$ м/с и останавливают на высоте $2h$. Во сколько раз изменится при этом средняя энергия шариков? Потерь механической энергии при соударениях нет, сила тяжести отсутствует.

Д.Абанин

Ф1731. Два одинаковых конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ каждый вначале заряжены до напряжения $U_0 = 10$ В и соединены параллельно при помощи длинных проводов общим сопротивлением $r = 1$ Ом. Резистор сопротивлением $R = 10$ кОм подключают непосредственно к выводам одного из конденсаторов. Какое количество теплоты выделится в проводах за большое время?

З.Рафаилов

Ф1732. К источнику переменного напряжения, частоту которого можно изменять в широких пределах, подключена цепь из двух одинаковых катушек индуктивностью L, двух конденсаторов емкостью C и амперметра переменного тока с очень малым сопротивлением (рис.3). Амплитуда напряжения источника U_0. На какой частоте ток через амперметр будет минимальным? Чему равна амплитуда этого тока? Элементы цепи считайте идеальными.

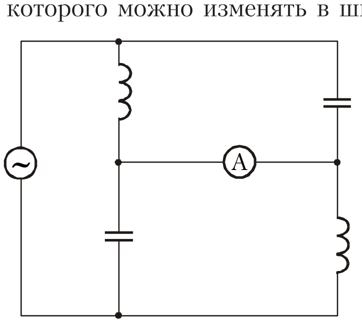


Рис.3

А.Зильберман

Решения задач М1696—М1705, Ф1713—Ф1717

М1696. *В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из N авиакомпаний, причем из каждого города есть по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт N − 1 рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.*

Рассмотрим некоторый путь, соединяющий некоторые два города, возможно включающий в себя некоторые закрытые после кризиса рейсы. Покажем, что в этом пути любой закрытый рейс можно заменить последовательностью незакрытых. Пронумеруем авиакомпании числами от 1 до N. В одной из авиакомпаний сохранились все рейсы; предположим, что в первой. Тогда в любой другой авиакомпании закрыли по одному рейсу. Рассмотрим только рейсы первой и второй авиакомпаний: из каждого города выходит по одному рейсу этих авиакомпаний. Следовательно, все города разбиваются на циклы. В одном из этих циклов закрыли один рейс. Очевидно, можно пролететь остальными рейсами этого цикла, следовательно, мы можем «обойти» любой закрытый рейс. Отметим, что мы при этом не используем рейсы других авиакомпаний, следовательно, аналогично можно обойтись без остальных закрытых рейсов.

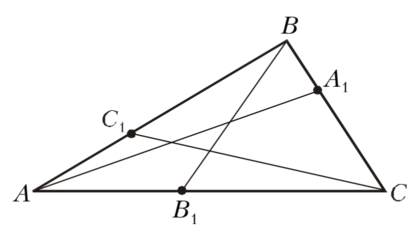
Д.Карпов

М1697. *Сумма цифр в десятичной записи натурального числа n равна 100, а сумма цифр числа 44n равна 800. Чему равна сумма цифр числа 3n?*

Заметим, что $44n$ есть сумма 4 экземпляров числа n и 4 экземпляров числа $10n$. Если складывать эти числа поразрядно, то в каждом разряде окажется сумма учетверенной цифры из этого же разряда числа n и учетверенной цифры из следующего разряда. Если при этом не происходит никаких переносов, то каждая цифра числа n складывается 8 раз, и сумма цифр во всех разрядах оказывается равной 800. При переносах же сумма цифр, очевидно, уменьшается (так как из одного разряда вычитается 10, а к другому прибавляется только 1). Поэтому в ситуации условия задачи переносов не происходит. Это означает, в частности, что любая цифра числа n не превосходит 2. Тогда при умножении n на 3 просто умножается на 3 каждая его цифра, а значит, и сумма цифр. Поэтому сумма цифр числа $3n$ равна 300.

А.Голованов

М1698. *На сторонах треугольника ABC расположены точки A_1, B_1 и C_1 (см. рисунок). При этом известно, что $AA_1 \le 1$, $BB_1 \le 1$ и $CC_1 \le 1$. Докажите, что площадь треугольника не превосходит $1/\sqrt{3}$.*



Пусть треугольник ABC неостроугольный: $\angle BAC \ge \frac{\pi}{2}$. Тогда $AB \le B_1B \le 1$, $h_c \le CC_1 \le 1$ и $S_{\Delta ABC} \le \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

В случае остроугольного ΔABC высоты опущены на сами стороны (а не на их продолжения). Если $\angle BAC$ – наименьший угол треугольника, то, очевидно, $\angle BAC \le \frac{\pi}{3}$. Поскольку $h_a \le 1$, то из этого следует, что

$$\min\{AB,\,AC\} \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Значит, $S_{\Delta ABC} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.