на высоте, равной a. Критерий устойчивости (2) не выполняется. Но что будет, если чуть-чуть изменить форму эллипсоида? Датский математик Пит Хайн придумал тело вращения кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2,5} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2,5} = 1$$

(для отрицательных x и y в этой формуле берутся значения модуля). При удачном подборе высоты a и ширины b (например, 5 и 4 см соответственно) так называемый суперэллипсоид Хайна стоит устойчиво на горизонтальной плоскости на любом из своих полюсов.

Можно показать, что этим же свойством устойчивости обладает всякое однородное тело вращения кривой $(x/a)^n + (y/b)^n = 1$ вокруг оси X, если $n > 2$ и $a > b > 0$. При больших n тело похоже на цилиндр с закругленным дном и верхом – чем не подходящая модель качающейся скалы? И экспериментировать с искусственной скалой куда легче, чем с настоящей. Правда, верно и то, что «лучше гор могут быть только горы...» и что очень интересно раскачивать настоящие каменные валуны на свежем воздухе в русле какой-либо пересохшей горной речки.

В заключение отметим, что проблема устойчивости равновесия тел – очень старая проблема, которой занимались ученые прошедших эпох. Так, Э.Торричелли в 1644 году сформулировал критерий устойчивого равновесия системы двух тел в поле тяжести, который Х.Гюйгенс обобщил на систему из нескольких тел (принцип Торричелли). В 1788 году Ж.Лагранж доказал теорему, определяющую достаточность условия равновесия систем; более строгое доказательство этой теоремы принадлежит П.Дирихле. Согласно теореме Лагранжа–Дирихле, если потенциальная энергия изолированной системы в положении равновесия имеет минимум, то положение равновесия системы устойчивое.

Примечание (о теореме Эйлера)

В статье мы рассмотрели случай, когда скала и опора в области контакта имели сферическую форму. Вообще говоря, камни, даже гладкие, вовсе не обязаны быть шарами или иметь сферические основания. Как же тогда рассматривать задачу об устойчивости равновесия скалы? Здесь нам на помощь придет простая геометрическая идея, состоящая в том, что любую плоскую гладкую кривую в какой-либо произвольной точке A можно аппроксимировать некоторой окружностью, радиус которой называется радиусом кривизны кривой в точке A. Тогда задача про качающуюся скалу, когда камни не круглые, сведется опять к исследованию равновесия круглых тел. Итак, по порядку.

Чтобы количественно оценить роль формы тела в области контакта с опорой, определим некоторые понятия. Пусть в плоскости XY дана кривая l, A – точка на этой кривой, A_1 – близкая к ней точка, так что Δl – длина дуги AA_1, $\Delta\theta$ – угол между касательными к кривой в точках A и A_1. Отношение $\frac{\Delta\theta}{\Delta l}$ называется средней кривизной на участке AA_1, а предел этого отношения, когда точка A_1 приближается к A, обозначается $\frac{1}{\rho_A}$ и называется кривизной кривой в точке A:

$$\frac{1}{\rho_A} = \lim \frac{\Delta\theta}{\Delta l_A} \text{ при } \Delta l_A \to 0 .$$

Кривизна имеет размерность, обратную длине, а величина ρ_A по определению является радиусом кривизны кривой в точке A. Окружность радиусом ρ_A, проведенная через точку A и любые другие две близлежащие к ней точки кривой l, называется соприкасающей окружностью, а центр окружности O_A называется центром кривизны кривой l в точке A.

Нетрудно догадаться, что определенное таким образом понятие кривизны линии позволяет судить количественно, сколь сильно изогнута кривая в заданной точке, или, другими словами, сколь сильно она отличается от прямой линии. У прямой кривизна равна нулю ($\Delta\theta = 0$). Для окружности (радиусом R) $\Delta l = R\Delta\theta$, т.е. это кривая с постоянным радиусом кривизны $\rho = R$, а кривизна окружности есть величина, обратная радиусу.

Как правило, кривизна кривой изменяется от точки к точке. Например, у так называемой параболы Нейля, описываемой уравнением $y = x^{3/2}$, радиус кривизны в точке $x = 0$ равен 0 и быстро растет с увеличением x по формуле $R = \sqrt{x}(4 + 9x)^{3/2}/6$. У обычной параболы $y = x^2$ $R = \left(1 + 4x^2\right)^{3/2}/2$.

Для тех, кто знаком с правилами дифференцирования, укажем, что если кривая l задана уравнением $y = y(x)$, то $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}$, где y' и y'' – первая и вторая производные функции $y(x)$ по x.

С помощью понятия кривизны линии можно определить кривизну какой-либо поверхности S в данной точке C. Проведем в точке C касательную к поверхности плоскость P. Любая другая плоскость L, проходящая через C и перпендикулярная плоскости P, пересечет поверхность S по некоторой кривой l_L, имеющей в точке C радиус кривизны R. Эта кривая называется нормальным сечением поверхности S. Ясно, что значения R могут быть, вообще говоря, различны для разных нормальных сечений. Наибольшее и наименьшее значения R среди всех возможных называются главными радиусами кривизны R_1 и R_2 поверхности S в точке C, причем соответствующие им плоскости L_1 и L_2 всегда перпендикулярны друг другу, а кривизна $1/R$ произвольного нормального сечения выражается через R_1 и R_2 по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2},$$

где φ – угол, образованный рассматриваемым нормальным сечением с плоскостью L_1. Это утверждение носит название теоремы Эйлера, вернее – это ее современная формулировка.

Теорема Эйлера указывает путь, как искать решение задачи для камней неправильной формы, когда главные радиусы кривизны R_1, R_2 и r_1, r_2 в точке контакта не равны попарно друг другу.

Попробуйте теперь, например, сформулировать критерий устойчивости скалы, когда скала и опора – выпуклые валуны неправильной формы.

Упражнения

1. Выведите условие (2), используя тот факт, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела минимальна.

2. «Ванька-встанька» стоит на вершине неподвижного шара. Радиусы шара и основания «ваньки-встаньки» одинаковы и равны r. Максимальный угол, на который можно отклонить от вертикали игрушку так, чтобы она не упала с шара, равен α_0 (проскальзывания нет). Найдите, где расположен центр тяжести «ваньки-встаньки».

3. Полушарие радиусом r стоит устойчиво на неподвижном шаре радиусом R, если выполняется условие $r < 0{,}6R$. Где расположен центр тяжести полушария?

4. При выводе формулы (2) предполагалось, что движение камня – это качение по поверхности опоры. Допустим, что трение уменьшилось настолько, что качение стало сопровождаться проскальзыванием. Как это отразится на устойчивости равновесия камня?

5. Возможно ли опрокинуть качающуюся скалу?