мистическое число, квадрат которого равен −1. Формула Эйлера потрясла меня, как, пожалуй, ничто математическое не потрясало ни до, ни после. Эта формула восхищала не одного меня. Наш знаменитый академик, математик и кораблестроитель Алексей Николаевич Крылов, слова которого я поставил эпиграфом к этому разделу, видел в этой формуле символ единства всей математики, ибо в ней «−1 представляет арифметику, i − алгебру, π − геометрию и e − анализ».

Можно очень многое сказать о творце этой формулы Леонарде Эйлере (1707−1783) − гениальном математике, физике, механике и астрономе, прожившем значительную часть своей жизни в России и похороненном в Санкт-Петербурге.

Леонард Эйлер − один из величайших тружеников в истории науки. Ему принадлежит 865 исследований по самым разнообразным проблемам. В 1909 году швейцарское естественнонаучное общество приступило к изданию полного собрания сочинений Эйлера. С тех пор прошел срок больший, чем вся жизнь Эйлера, издано около семидесяти томов его сочинений, а издание еще не закончено.

Переписка Эйлера составляет свыше 3000 писем. Уже одно это − свидетельство необыкновенного нравственного облика ученого: дурным людям писем не пишут. Все ученые, современники Эйлера, делились с ним плодами своих размышлений, просили высказать свое суждение по интересующим их проблемам и всегда находили отклик и поддержку.

Душевная красота Эйлера отразилась во множестве его поступков. В предыдущем разделе я рассказывал о том, как Эйлер старался утвердить приоритет Ферма. Когда молодой Лагранж (о нем речь впереди) посвятил Эйлера в свои исследования в области вариационного исчисления, Эйлер направил ему письмо (от 2 декабря 1759 года, Лагранжу было тогда 23 года), и я не могу не привести его слова, слова высокого духовного благородства:

«Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, что только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после моих первых попыток я занимался едва ли не один, доведена до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение; я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать часть заслуженной тобою славы».

Теорема 3. $e^{\pi i} = -1$.

Доказательство. При доказательстве мы будем использовать следующую формулу (она носит название *бином Ньютона*):

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

где n − натуральное число, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Как известно,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Применим формулу бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots$$

(здесь мы выписали только несколько первых членов разложения). Перейдем в обеих частях равенства к пределу при $n\to\infty$ и получим следующее *разложение в ряд*:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots$$

Поясним, почему формальный переход к пределу дает такой ряд. Поскольку $(k+1)$-е слагаемое имеет вид

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

и при $n\to\infty$ сомножители в числителе стремятся к 1, то $(k+1)$-е слагаемое стремится к $\frac{1}{k}$! Конечно, с точки зрения современного математика, этот предельный переход необходимо строго обосновать. Но во времена Эйлера к вопросу о правомерности преобразований подходили довольно свободно. Сам Эйлер в подобных случаях поступал очень смело и практически всегда оказывался прав.

Рассуждая аналогично, можно получить разложение

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Это разложение впервые было получено именно Эйлером, и в его честь число e получило свое обозначение: e есть первая буква фамилии Euler.

Еще задолго до Эйлера были известны разложения в ряд синуса и косинуса:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Гениальная идея Эйлера состоит в том, что формулу для e^x можно применять не только к действительным, но и к комплексным числам:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots,$$

где z − произвольное комплексное число. Подставим в эту формулу $z = \pi i$ (где i − мнимая единица, т.е. $i^2 = -1$):

$$e^{\pi i} = 1 + \pi i + \frac{(\pi i)^2}{2!} + \frac{(\pi i)^3}{3!} + \frac{(\pi i)^4}{4!} + \frac{(\pi i)^5}{5!} + \ldots =$$

$$= 1 + \pi i - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3}{3!}i + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^5}{5!}i \ldots = \left(1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \ldots\right) =$$

$$= \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Теорема 3 доказана.

Позднее, когда появилась строгая теория рядов, подобные выводы, восходящие к Эйлеру, были подтверждены, а все преобразования признаны законными.

(*Продолжение следует*)