# Материалы вступительных экзаменов 1999 года

## Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

*Письменный экзамен*

### Вариант 1

*(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-99», май)*

**1.** Решите уравнение

$$\left(x^2+4\right)\lg\sin^2 3x + x^2\lg\cos^2 2x = 4\lg\left(\cos 2x\sin^3 3x\right).$$

**2.** Сумма членов конечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 1, а знаменатель положителен, равна $\frac{40}{27}$, а сумма тех же членов с чередующимися знаками (первый – со знаком «плюс», второй – со знаком «минус» и т.д.) равна $\frac{20}{27}$. Найдите знаменатель прогрессии.

**3.** Найдите все $x$, при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x-3|\left(|x-5|-|x-3|\right)-6x$$

и

$$|x|\left(|x|-|x-8|\right)+24$$

неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

**4.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $B$ проведена прямая, пересекающая окружности в точках $C$ и $D$, лежащих по разные стороны от прямой $AB$. Касательные к этим окружностям в точках $C$ и $D$ пересекаются в точке $E$. Найдите $AE$, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

**5.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{a+2-2^{x-2}}{a+3} \ge \frac{5a+5}{2\left(2^x+3a+3\right)}$$

содержит какой-либо луч на числовой прямой.

**6.** Основанием пирамиды $SABCD$ является трапеция $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ такими, что $BC : AD = 2 : 5$. Диагонали трапеции пересекаются в точке $E$, а центр $O$ вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке $SE$ и делит его в отношении $SO : OE = 7 : 2$. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если площадь боковой грани $SBC$ равна 8.

### Вариант 2

*(механико-математический факультет)*

**1.** Решите неравенство

$$3^{(x+3)^2}+\frac{1}{9}\le 3^{x^2-2}+27^{2x+3}.$$

**2.** Решите уравнение

$$\left|\log_2(2x+7)\right| = \log_2\left(1+|x+3|\right)+\log_2\left(1-|x+3|\right).$$

**3.** При каких значениях $\varphi$ все положительные корни уравнения

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{3x}{2}+\varphi\right)=\sin\frac{x}{2},$$

расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

**4.** В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла $D$ пересекает биссектрисы углов $A$ и $C$ в точках $M$ и $N$ соответственно, а биссектриса угла $B$ пересекает те же две биссектрисы в точках $L$ и $K$, причем точка $K$ лежит на основании $AD$.

а) В каком отношении прямая $LN$ делит сторону $AB$, а прямая $MK$ – сторону $BC$?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

**5.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства

$$\frac{x^2+\left(2a^2+6\right)x-a^2+2a-3}{x^2+\left(a^2+7a-7\right)x-a^2+2a-3}<0,$$

не меньше 1.

**6.** Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найдите расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

### Вариант 3

*(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-99», апрель)*

**1.** Пункты $A$, $B$, $C$ и $D$ расположены на одной прямой в указанной последовательности. Пешеход выходит из пункта $A$ со скоростью 5 км/ч и направляется в пункт $D$. Достигнув пункта $D$, он поворачивает обратно и доходит до пункта $B$, затратив на всю дорогу 5 ч. Известно, что расстояние между $A$ и $C$ он прошел за 3 ч, а расстояния между $A$ и $B$, $B$ и $C$, $C$ и $D$ (в заданном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Найдите расстояние между $B$ и $C$.

**2.** Решите неравенство

$$\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}\left(x^2-4x+4\right)\right| \ge 9\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}\left(x^2-4x+4\right)\right|.$$

**3.** Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{8}} = -\sin x\cos x.$$

**4.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ взята точка $D$ такая, что $\angle CAD = 2\angle DAB$. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ADC$ и $ADB$, равны соответственно 8 и 4, а расстояние между точками касания этих окружностей с прямой $BC$ равно $\sqrt{129}$. Найдите $AD$.

**5.** При каких значениях параметра $a$ уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4; 0]$?

**6.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) отрезки $M_1N_1$, $M_2N_2$, $M_3N_3$ – общие перпендикуляры к парам отрезков $A_1C_1$ и $AB_1$, $BC_1$ и $AC$, $DC_1$ и $AD_1$ соответственно. Объем параллелепипеда равен $V$, радиус описанной сферы равен $R$, а сумма длин ребер $AA_1$, $AB$ и $AD$ равна $m$. Найдите сумму объемов пирамид $AA_1M_1N_1$, $ABM_2N_2$ и $ADM_3N_3$.

### Вариант 4

*(факультет вычислительной математики и кибернетики)*

**1.** Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Сравните $\arccos\left(-\sqrt{-3\cos\alpha - 1}\right)$ и $\dfrac{19\pi}{24}$.

**2.** На координатной плоскости $(x,\ y)$ проведена окружность радиуса 4 с центром в начале координат. Прямая, заданная уравнением $y = 4 - \left(2-\sqrt{3}\right)x$, пересекает ее в точках $A$ и $B$. Найдите сумму длин отрезка $AB$ и меньшей дуги $AB$.

**3.** Решите неравенство

$$\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4} + 2\right| \ge -3 + \log_{\frac{1}{\pi+1}}\sqrt{(x-2)^6}.$$

**4.** В четырехугольной пирамиде $SABCD$ высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды $S$, равны $\sqrt{2}$. Известно, что $AB = 2$, $BC = 6$, $\angle ABC = \dfrac{\pi}{3}$, $\angle ADC = \dfrac{2\pi}{3}$. Найдите высоту пирамиды, если ее основание находится внутри четырехугольника $ABCD$.

**5.** Решите уравнение

$$\operatorname{tg}14x + 3\operatorname{ctg}14x + \sin 6x - 2\sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}+1}.$$

**6.** В остроугольном треугольнике $ABC$ угол $\angle ACB = 75^\circ$, а высота, опущенная из вершины этого угла, равна 1. Найдите радиус описанной окружности, если известно, что периметр треугольника $ABC$ равен $4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

### Вариант 5

*(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-99», май)*

**1.** Решите уравнение

$$\sin x - \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0.$$

**2.** Решите уравнение

$$\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+1} = x + 4.$$

**3.** Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_3(x+1)} \le \frac{1}{\log_9(x+5)}.$$

**4.** В треугольнике $ABC$ взяты точка $N$ на стороне $AB$, а точка $M$ – на стороне $AC$. Отрезки $CN$ и $BM$ пересекаются в точке $O$, $AN : NB = 2 : 3$, $BO : OM = 5 : 2$. Найдите $CO : ON$.

**5.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\left(\frac{y}{x}+\frac{3x}{y}\right)} = 16, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}. \end{cases}$$

**6.** В ромбе $ABCD$ высоты $BP$ и $BQ$ пересекают диагональ $AC$ в точках $M$ и $N$ ($M$ между $A$ и $N$), $AM = p$, $MN = q$. Найдите $PQ$.

**7.** При каких значениях $a$ уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $0 \le x < 2\pi$?

**8.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) $AB = BC = 2a$, $AA_1 = a$. Плоскость сечения проходит через точки $B_1$ и $D$ параллельно прямой $AC$. Найдите радиус шара, касающегося этого сечения и трех граней параллелепипеда с общей вершиной $B$.

### Вариант 6

*(физический факультет)*

**1.** Решите уравнение

$$\cos 7x + \cos 3x + 2\sin^2 x = 1.$$

**2.** Решите неравенство

$$\left|2 - \frac{1}{x-4}\right| < 3.$$

**3.** В равнобочную трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана окружность, $BC : AD = 1 : 3$, площадь трапеции равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите $AB$.

**4.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2\cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5\cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$$

**5.** Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}.$$

**6.** Через точку $N$ проведены две прямые, касающиеся некоторой окружности с центром $O$. На одной из этих прямых взята точка $A$, а на другой прямой взята точка $B$ так, что $OA = OB$, $OA > ON$, $NA \ne NB$. Известно, что $NA = a$, $NB = b$, $OA = c$. Найдите $ON$.

**7.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной $S$ боковое ребро $SA$ равно $b$. Сфера радиуса $\dfrac{b}{2}$ касается плоскости $SAC$ в точке $C$ и проходит через точку $B$. Найдите $\angle ASC$.

**8.** Для любого допустимого значения $a$ решите неравенство

$$\log_{2a}\left(\log_3 x^2\right) > 1$$

и найдите, при каком значении $a$ множество точек $x$, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6.

### Вариант 7

*(химический факультет)*

**1.** Решите неравенство

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \le 2.$$

**2.** Решите уравнение

$$\left(\sin x + \cos x - \sqrt{2}\right)\sqrt{-11x - x^2 - 30} = 0.$$

**3.** Решите неравенство

$$\left(\log_{3-x}(2x+1)\right)\left(\log_{2x+1}x^2\right) \le \left(\log_{3-x}(3x+1)\right)\left(\log_{3x+1}(x+2)\right).$$

**4.** В треугольнике $ABC$ угол $\angle B$ равен $\pi/6$. Через точки $A$ и $B$ проведена окружность радиуса 2, касающаяся прямой $AC$ в точке $A$. Через точки $B$ и $C$ проведена окружность радиуса 3, касающаяся прямой $AC$ в точке $C$. Найдите длину стороны $AC$.

**5.** В сферу радиуса $\sqrt{3}$ вписан параллелепипед, объем которого равен 8. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

**6.** Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение

$$\left|\frac{x\left(2^x - 1\right)}{2^x + 1} + 2a\right| = a^2 + 1$$

имеет нечетное число решений.

**7.** Последовательность чисел $a_1, a_2 \ldots$ определяется следующим правилом: $a_1 = 0$,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2, & \text{если число } n \text{ нечетное,} \\ 2a_n, & \text{если число } n \text{ четное,} \end{cases}$$

т.е. $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 6$, $a_5 = 12$, $a_6 = 14$ и т.д. Найдите $a_{1999}$.

### Вариант 8

*(факультеты биологический и фундаментальной медицины)*

**1.** Решите уравнение

$$8\cos 6x - 12\sin 3x = 3.$$

**2.** Решите неравенство

$$\frac{3}{|x-1|} \ge 2x + 5.$$

**3.** Решите уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3 - 3x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{55}{8}\right) + 2\log_{(8-7x)^2}(x+3) = 1.$$

**4.** На основаниях $AD$ и $BC$ трапеции $ABCD$ построены квадраты $ADEF$ и $BCGH$, расположенные вне трапеции. Диагонали трапеции пересекаются в точке $O$. Найдите длину отрезка $AD$, если $BC = 2$, $GO = 7$, а $GF = 18$.

**5.** Найдите все значения $y$, удовлетворяющие условию $y > \dfrac{1}{2}$, такие, что неравенство

$$16y^3+6y^3x-4y^3x^2-50y^2-11y^2x+ \\ +10y^2x^2+52y+4yx-8yx^2- \\ -18+x+2x^2>0$$

выполняется при всех $x$ из интервала $1<x<2y$.

**6.** Два велосипедиста стартуют одновременно из двух точек круговой велотрассы — первый из точки $A$, второй из точки $B$ – и едут в противоположных направлениях с постоянными скоростями. Известно, что из их первых 15 встреч на трассе после старта только третья и пятнадцатая состоялись в точке $B$. Найдите отношение скорости первого велосипедиста к скорости второго, если известно, что к моменту их пятой встречи каждый из велосипедистов проехал не менее одного круга.

*Вариант 9*

*(факультет почвоведения)*

**1.** Решите уравнение

$$4^x-2^x=56.$$

**2.** Решите уравнение

$$\cos 2x=\sin x.$$

**3.** Решите уравнение

$$\log_\pi\left|x^2-1\right|=\log_{\sqrt{\pi}}|x|.$$

**4.** Решите неравенство

$$\sqrt[5]{y^5}\ge\sqrt[4]{y^4}.$$

**5.** Какое количество воды надо добавить в один литр 10%-го водного раствора спирта, чтобы получить 6%-й раствор?

**6.** Дан треугольник $ABC$ с основанием $AB$, равным $\sqrt{3}/2$, и высотой $CH$, опущенной на это основание и равной $\sqrt{6}/3$. Известно, что точка $H$ лежит на $AB$ и $AH : HB = 2 : 1$. В угол $ABC$ треугольника $ABC$ вписана окружность, центр которой лежит на высоте $CH$. Найдите радиус этой окружности.

**7.** Для каждого значения параметра $b\le 0$ решите неравенство (относительно $x$)

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\ge b.$$

*Вариант 10*

*(геологический факультет)*

**1.** Найдите область определения функции

$$y=\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+3)\right)\cdot\sqrt{\frac{25}{(x+2)^2}-1}.$$

**2.** Известно, что $x_1$, $x_2$ – корни уравнения

$$2x^2-\left(\sqrt{3}+5\right)x-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=0.$$

Найдите значение $A=x_1+x_1x_2+x_2$ и выясните, какое из чисел больше: $A$ или 1,999?

**3.** Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости $(x, y)$ системой неравенств

$$\begin{cases} x\left(x+y-\sqrt{2}\right)\le 0, \\ x^2+y^2\le 2. \end{cases}$$

**4.** Медиана $AM$ треугольника $ABC$ равна половине стороны $BC$. Угол между $AM$ и высотой $AH$ равен 40°. Найдите углы треугольника $ABC$.

**5.** Решите уравнение

$$\left|\operatorname{ctg}^2 2x+8\sqrt{-\operatorname{ctg}2x}-3\right|= \\ =\left|\operatorname{ctg}^2 2x-8\sqrt{-\operatorname{ctg}2x}-3\right|.$$

**6.** Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$, в которой $a_3=-13$ и $a_7=3$. Определите, при каком количестве членов сумма прогрессии будет наименьшей; найдите значение этой суммы.

**7.** Сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через вершины $B$, $C$, $C_1$ и через середину ребра $A_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). Найдите площадь поверхности этого куба.

**8.** Решите неравенство

$$\log_{84-2x-2x^2}\cos x\le\log_{x+19}\cos x.$$

*Вариант 11*

*(географический факультет)*

**1.** Решите уравнение

$$\log_{4x-8}\left(x^2-2x-3\right)=1.$$

**2.** Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-8x+5}=x-2.$$

**3.** По реке из пункта $A$ в пункт $B$ выплыл катер. Одновременно из пункта $B$ в пункт $A$ выплыла моторная лодка. Пройдя четверть пути от $B$ к $A$, лодка встретилась с катером. Катер, достигнув пункта $B$, повернул обратно и прибыл в пункт $A$ одновременно с лодкой. Во сколько раз скорость катера больше скорости лодки?

**4.** Найдите все значения параметра $a$, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x+6a\cos x-\sin x-3a=0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $\frac{3}{2}\pi$.

**5.** В четырехугольнике $ABCD$ диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $K$. Точки $L$ и $M$ являются, соответственно, серединами сторон $BC$ и $AD$. Отрезок $LM$ содержит точку $K$. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AB=3$, $AC=\sqrt{13}$ и $LK : KM=\frac{1}{3}$.

**6.** В пространстве заданы три луча $DA$, $DB$ и $DC$, имеющие общее начало $D$, так что

$$\angle ADB=\angle ADC=\angle BDC=90°.$$

Сфера пересекает луч $DA$ в точках $A_1$ и $A_2$, луч $DB$ – в точках $B_1$ и $B_2$, а луч $DC$ – в точках $C_1$ и $C_2$. Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площади треугольников $DA_1B_1$, $DA_1C_1$, $DB_1C_1$ и $DA_2B_2$ соответственно равны $\frac{15}{2}$, 10, 6 и 40.

*Вариант 12*

*(социологический факультет)*

**1.** Решите уравнение

$$\sqrt{y-1}=6-y.$$

**2.** Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, для которой сумма первых пяти членов с нечетными номерами на единицу больше суммы первых пяти членов с четными номерами и равна квадрату первого члена.

**3.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали $AC$ и $BD$. При этом оказалось, что $\angle BAC = \angle BDC$, а площадь круга, описанного около треугольника $BDC$, равна $\frac{25\pi}{4}$.

1) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$.

2) Зная, что

$$BC=3,\ AC=4,\ \angle BAD=90°,$$

найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

**4.** Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тысячи рублей; каждое выступление по телевидению – на 80% и стоит 47 тысяч рублей. Определите количество и последовательность выступлений в этих средствах массовой информации, при которых кандидат получит наибольшее возможное число голосов, если на всю кампанию можно израсходовать не более 112 тысяч рублей.

**5.** Решите неравенство

$$\frac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2|\le 0.$$

**6.** При каких значениях параметра $a$ неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\ge$$
$$\ge\left|\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5;\ 6]$?

Вариант 13

*(отделение экономики экономического факультета)*

**1.** Решите неравенство

$$\log_{|x|-2}|x-3|\le 0.$$

**2.** Решите неравенство

$$4\sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14}\le 14\sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x-1}}.$$

**3.** Первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить задание не более чем за 9 дней. Вторая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание не менее чем за 18 дней. Первая и третья бригады, работая вместе, могут выполнить то же задание ровно за 12 дней. Известно, что третья бригада всегда работает с максимально возможной для нее производительностью труда. За сколько дней может выполнить задание одна вторая бригада?

**4.** В трапеции $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ диагонали $AC = a$, $BD = \frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

**5.** Решите уравнение

$$x+\frac{1}{6}\arccos\left(\cos 15x + 2\cos 4x\sin 2x\right)=\frac{\pi}{12}.$$

**6.** В треугольной пирамиде $SABC$ угол $\angle ACB = \alpha$, ребро $SC = d$ является диаметром сферы, пересекающей ребра $SA$ и $SB$ в их серединах. Найдите объем пирамиды, если $\angle SAC = \angle SBC = \beta$, причем $\beta<\frac{\pi}{4}$.

**7.** Найдите все значения $b$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} b\sin|2z|+\log_5\left(x\sqrt[8]{2-5x^8}\right)+b^2=0,\\ \left(\left(y^2-1\right)\cos^2 z - y\cdot\sin 2z+1\right)\times\\ \quad\times\left(1+\sqrt{\pi+2z}+\sqrt{\pi-2z}\right)=0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определите эти решения.

Вариант 14

*(факультет психологии)*

**1.** Решите неравенство

$$\frac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1.$$

**2.** Решите уравнение

$$x^{\log_7 4}+5\cdot 2^{\log_7 x}-4=0.$$

**3.** Решите систему

$$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{4},\\ \cos x\sin y=\frac{\sqrt6}{4},\\ \cos x\ge 0.\end{cases}$$

**4.** Найдите все значения параметра $p$, при каждом из которых множество значений функции $f(x)=\frac{3x+p}{x^2+5x+7}$ содержит полуинтервал $(-1;\ 3]$. Определите при каждом таком $p$ множество значений функции $f(x)$.

**5.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон $AB$ и $CD$ равны, соответственно, 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

**6.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых ровно пять различных наборов натуральных чисел $(x,\ y,\ z)$ удовлетворяют системе условий

$$\begin{cases}12x^2-4x-2xy+3y-9=0,\\ a\cdot yz+a\cdot xz+a\cdot xy>xyz.\end{cases}$$

Вариант 15

*(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)*

**1.** Расстояние в 160 км между пунктами *А* и *Б* автомобиль проехал со средней скоростью 40 км/ч. Часть пути по ровной дороге он ехал со скоростью 80 км/ч, а другую часть, по бездорожью, – со скоростью 20 км/ч. Какую часть пути между *А* и *Б* занимает ровная дорога?

**2.** Решите неравенство

$$\frac{1}{x^2+8x-9}\ge\frac{1}{3x^2-5x+2}.$$

**3.** В треугольнике $ABC$ медиана $AK$ пересекает медиану $BD$ в точке $L$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

**4.** Решите уравнение

$$\log_{(1-2\cos z)}(\cos 2z+\sin z+2)=0.$$

**5.** Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}\cos^3(z+4y+\pi/4)+\\ \qquad +1/\sin(2z+2y-\pi/4)=0,\\ \cos(3z+\pi/4)+\\ \qquad +1/\sin^3(4z-2y-\pi/4)=0.\end{cases}$$

Вариант 16

*(Институт стран Азии и Африки)*

**1.** Решите уравнение

$$\lg^2(2x-3)^2+4^{\left(3\log_4\sqrt[3]{2}\right)}\left(\frac{\log_4(3-2x)}{\log_4 10}\right)=0.$$

**2.** Упростив выражение

$$A=1-y+\frac{\sqrt[3]{(y-3)\sqrt{xy}+\left(3-y^{-1}\right)\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{y^{-2}}}\,y^{\frac{5}{6}}x^{-\frac{1}{6}},$$

где $x>0$, $y>0$ – действительные числа, выясните, что больше: $A$ или $\frac{5}{7}$.

**3.** Решите уравнение

$$\sin 9x = 6\sin 5x\cos 2x - \sin x.$$

**4.** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом $\frac{\pi}{8}$. Каждое боковое ребро равно $\sqrt6$ и наклонено к плоскости основания под углом $\frac{5\pi}{13}$. Определите объем пирамиды.

**5.** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5}-3}{|x+4|-7}\ge 1.$$

**6.** Окружности радиусов 2 и 6 с центрами, соответственно, в точках $O_1$ и $O_2$ касаются внешним образом в точке $C$. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная; эти касательные пересекаются в точке $D$. Найдите радиус вписанной в треугольник $O_1O_2D$ окружности.

**7.** Решите систему неравенств

$$\begin{cases}2x^2-\log_2\left(y\sqrt2+6\right)^3-16\ge y^4-3x-y^2,\\ x^2-y^2\le\log_2\left(y\sqrt2+6\right)+x+1.\end{cases}$$

## ФИЗИКА

*Задачи устного экзамена*

*Физический факультет*

**1.** На край доски, лежащей на гладкой горизонтальной плоскости, кладут небольшую шайбу, масса которой в $k$

раз меньше массы доски. Шайбе щелчком сообщают скорость, направленную к центру доски. Если эта скорость больше $u$, то шайба соскальзывает с доски. С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость шайбы будет в $n$ раз больше $u$ ($n > 1$)?

**2.** Неоднородная балка (рис.1) подвешена к потолку на трех одинаковых

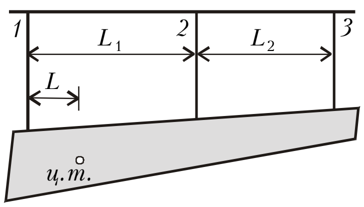


Рис. 1

в недеформированном состоянии легких резиновых шнурах так, что шнуры вертикальны и лежат в одной плоскости. Расстояния между шнурами $L_1$ и $L_2$, а между первым шнуром и центром тяжести балки (по горизонтали) $L$. Точки крепления шнуров к балке лежат на одной прямой. Найдите отношение сил натяжения первого и второго шнуров, считая деформации шнуров малыми.

**3.** На внутренней поверхности тонкого обода колеса массой $M$ и радиусом $R$ лежит груз малых размеров массой $m$. Коэффициент трения груза об обод $\mu \ll 1$. Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, расположенной горизонтально. Пренебрегая массой спиц и втулки колеса, найдите максимальную скорость груза, при которой колебания колеса еще могут быть гармоническими.

**4.** В горизонтально расположенный цилиндр с поршнем, касающимся дна, через кран в дне накачали гелий. В результате поршень несколько передвинулся. Закрыв кран, цилиндр медленно нагрели, а затем начали охлаждать. Когда от гелия отвели в $n = 4$ раза меньшее количество теплоты, чем было им получено при нагревании, поршень начал двигаться. Найдите отношение сил трения и атмосферного давления, действующих на поршень, если отношение максимального объема гелия к его объему перед нагреванием $k = 5$.

**5.** Между поршнем и дном гладкого расположенного горизонтально цилиндра находится кусочек льда массой $m$ и насыщенный водяной пар. В некоторый момент температура льда стала равной 0 °С, а объем пара стал равным $V$. Пренебрегая объемом образующейся воды и теплообменом пара и льда с другими телами, найдите перемещение поршня по прошествии достаточно большого промежутка времени. Площадь поперечного сечения цилиндра $S$, молярные теплоты плавления льда и парообразования воды $\lambda$ и $L$, молярные теплоемкость и масса воды $C$ и M. Опыт проводился при нормальном атмосферном давлении.

**6.** В плоский воздушный конденсатор параллельно его обкладкам вставили тонкую проводящую пластину, размеры которой совпадают с размерами обкладок. Обкладки соединены проводником. Пластина имеет заряд $q$. Какую минимальную работу нужно совершить против сил электрического поля, чтобы расстояние между одной из обкладок и пластиной изменить от начального $a$ до конечного $b$, если площадь пластины $S$, а расстояние между обкладками конденсатора равно $d$ и много меньше линейных размеров пластин?

**7.** К гальваническому элементу последовательно подключены два резистора. Сопротивление первого резистора в $n$ раз меньше внутреннего сопротивления элемента, а сопротивление второго выбрано таким, что на нем выделяется максимально возможное количество теплоты. Во сколько раз изменится скорость растворения отрицательного электрода элемента, если эти резисторы подключить к нему, соединив их параллельно?

**8.** Тонкий стержень длиной $L$ и массой $m$ подвесили за концы на двух одинаковых легких нерастяжимых нитях в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ так, что его ось горизонтальна, а нити вертикальны. Затем через стержень пропустили заряд $q$ столь быстро, что стержень практически не сместился из положения равновесия. Зная, что максимальная высота поднятия стержня много меньше длины нитей $H$, найдите максимальную вертикальную составляющую его скорости после прохождения заряда.

**9.** Чтобы лучше рассмотреть мелкие детали рисунка, человек берет лупу. Поднося ее к рисунку, он видит на нем резкое изображение нити лампочки, висящей над столом под потолком комнаты, когда расстояние между лупой и рисунком равно $b$ = 5 см. Поднося лупу к глазу, человек рассматривает рисунок. Найдите увеличение изображения рисунка, если оно находится на расстоянии наилучшего зрения $D$ = 25 см.

**10.** Угловое расстояние между максимумами первого и второго порядков синего света с длиной волны $\lambda_c$ = 0,44 мкм, наблюдаемыми при освещении дифракционной решетки параллельным пучком света от ртутной лампы, падающим под углом $\alpha$ = 50°, оказалось равным $\Delta\varphi$ = 5°. При этом в спектре третьего порядка наблюдались две близкие желтые линии, угловое расстояние между максимумами которых было равно $\delta\varphi$ = 4,3′. Найдите разность длин волн $\delta\lambda_ж$ желтого дублета ртути.

*Факультет вычислительной математики и кибернетики*

**1.** В кабине лифта высотой $H$ = 2,5 м, движущейся с ускорением, равным $a$ = 0,8 м/с$^2$ и направленным вниз, с высоты $h$ = 0,5 м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью $v_0$ относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

**2.** К грузику массой $M$ = 300 г прикреплена пружина, другой конец которой привязан к нити, перекинутой через блок (рис.2). На втором конце нити подвешен грузик массой $m$ = = 200 г. Когда блок заторможен, длина пружины $l$ = 15 см. Какую длину $l_1$ будет иметь пружина, если блок освободить? Считать, что колебания в системе не возникнут, т.е. грузики будут двигаться с постоянным ускорением. Длина недеформированной пружины $l_0$ = = 10 см. Массой пружины, нити и блока, а также трением в блоке пренебречь.

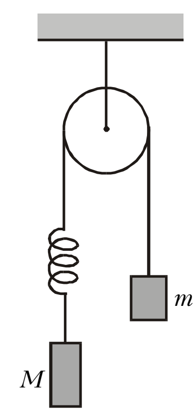


Рис. 2

**3.** Металлический стержень, изогнутый под углом $\varphi$ = 45°, как показано на рисунке 3, вращается с угловой скоростью $\omega$ = 6 с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси $OO'$. К концу стержня прикреплен груз массой $m$ = = 0,1 кг на расстоянии $l$ = 0,1 м от точки $O$. Определите модуль $F$ силы, с которой стержень действует на груз.

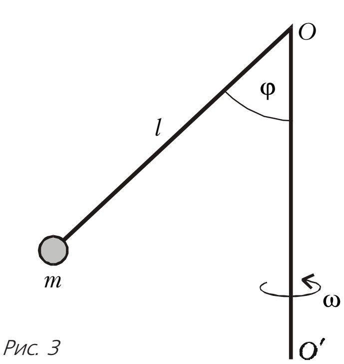


Рис. 3

Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с$^2$.

**4.** Какую минимальную работу $A$ нужно совершить, чтобы с высоты $h = 2$ м перебросить через стенку высотой $H = 4$ м камень массой $m = 0{,}2$ кг? Стенка расположена на расстоянии $L = 4$ м от места бросания. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

**5.** С идеальным одноатомным газом проводят процесс $1-2$, показанный на рисунке 4. Во сколько раз $(\alpha)$ при этом изменяется средняя кинетическая энергия одной молекулы?

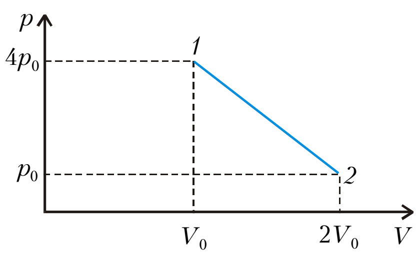


Рис. 4

**6.** С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.5). Найдите работу $A$, совершаемую газом за цикл, если известно, что

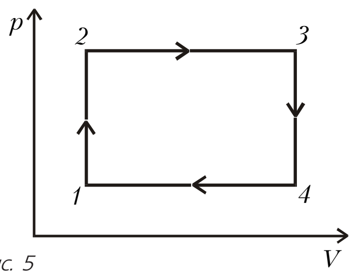


Рис. 5

температура в состоянии $1$ равна $T_1 = 300$ К, а в состояниях $2$ и $4$ температура одна и та же и равна $T = 320$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

**7.** Батарея с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом присоединена к цепи, изображенной на рисунке 6. Сопротивление каждого из резисторов $R = 1$ Ом. Найдите напряжение $U_{MN}$ на клеммах батареи. Сопротивлением всех соединительных проводов пренебречь.

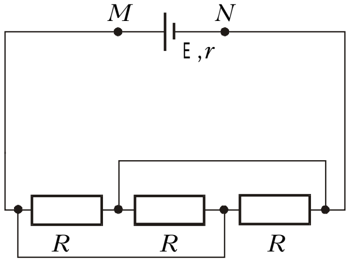


Рис. 6

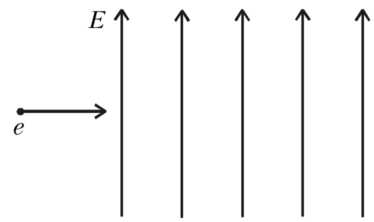


Рис. 7

**8.** Электрон влетает в область пространства с однородным электрическим полем напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно силовым линиям (рис.7). Определите величину и направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$, которое надо создать в этой области пространства для того, чтобы электрон пролетел ее, не отклоняясь от первоначального направления. Кинетическая энергия электрона $W_к = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести пренебречь.

**9.** Световой луч падает на поверхность стеклянного шара. Угол падения $\alpha = 45°$, показатель преломления стекла $n = 1{,}41$. Найдите угол $\gamma$ между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара.

**10.** Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. По другую сторону линзы находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Найдите радиус $r$ светового пятна на экране, если известно, что расстояние от источника до линзы $d = 30$ см, расстояние от линзы до экрана $b = 80$ см, фокусное расстояние линзы $F = 20$ см, а ее радиус $R = 3$ см.

### *Химический факультет*

**1.** С наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом, с высоты $h_1 = 2$ м соскальзывает небольшая шайба (рис.8). В конце спуска у

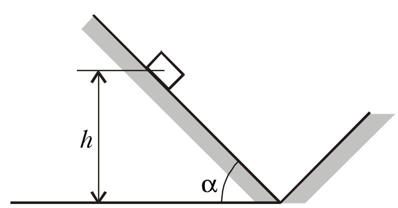


Рис. 8

основания наклонной плоскости шайба испытывает абсолютно упругое соударение со стенкой и поднимается вверх по наклонной плоскости на высоту $h_2 = 1{,}2$ м. Найдите коэффициент трения между шайбой и наклонной плоскостью.

**2.** Два шарика одинаковых размеров – один деревянный, а другой из алюминия – связаны легкой и достаточно длинной нитью. Шарики опускают в водоем, и через некоторое время оказывается, что их погружение происходит с постоянной скоростью. Найдите натяжение нити при этом движении. Массы шариков $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г. Принять $g = 10$ м/с$^2$.

**3.** По поверхности озера бегут волны со скоростью $u = 2$ м/с. Моторная лодка движется навстречу волнам со скоростью $v = 5$ м/с. С какой частотой волны бьются о нос лодки, если поплавок на поверхности воды колеблется с частотой $\nu_0 = 0{,}5$ Гц?

**4.** Мяч массой $m = 0{,}2$ кг отпустили без начальной скорости с высоты $H = 6$ м над полом. Найдите количество теплоты, выделившееся при первом ударе мяча о пол, если промежуток времени между первым и вторым ударами о пол составляет $\Delta t = 2$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ м/с$^2$.

**5.** Два баллона с кислородом соединены трубкой с краном. Массы газа в обоих баллонах одинаковы. При закрытом кране давление в одном баллоне $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, а в другом $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па. Какое давление установится в баллонах, если кран открыть? Температуру в баллонах считать постоянной и одинаковой, а газ – идеальным.

**6.** Батарею параллельно соединенных конденсаторов с емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ сначала подсоединили к источнику с ЭДС, равной $\mathcal{E} = 6$ В (ключ $K$ в положении $1$ на рисунке 9). Затем ключ переводят в положение $2$, соединяя батарею с конденсатором емкостью $C_3 = 3$ мкФ. Найдите заряд, который получит конденсатор емкостью $C_3$.

**7.** Концентрация электронов проводимости в чистом германии при комнатной температуре $n = 3 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$. Найдите, какова доля ионизированных атомов германия $(n^+)$. Считать, что каждый ионизированный атом теряет по одному электрону. Плотность германия $\rho = 5400$ кг/м$^3$, молярная масса $M = 0{,}073$ кг/моль. Число Авогадро принять равным $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

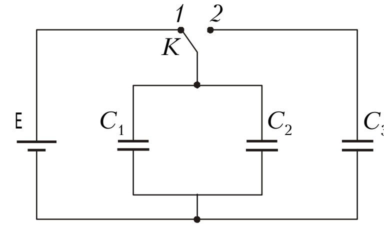


Рис. 9

**8.** Диод подключен к источнику синусоидального напряжения последовательно с резистором, как показано на рисунке 10. Действующее значение

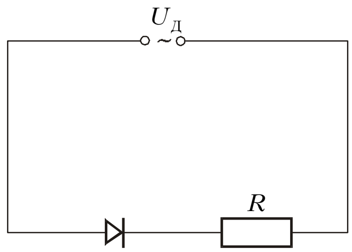


Рис. 10

напряжения источника $U_д$ = 20 В. Сопротивление резистора $R$ = 12 Ом. Найдите величину сопротивления диода при прямом токе, если средняя мощность, выделяющаяся в цепи, равна $P$ = 10 Вт. Обратным током диода пренебречь.

**9.** В пространстве с однородными электрическим и магнитным полями движется протон. Линии магнитной индукции и линии напряженности этих полей параллельны. В тот момент, когда скорость протона перпендикулярна линиям электрического и магнитного полей, его ускорение, вызванное действием этих полей, равно $a = 10^{12}$ м/с$^2$. Найдите напряженность электрического поля $E$, если скорость протона $v$ = 60 км/с, индукция магнитного поля $B$ = = 0,1 Тл. Отношение заряда протона к его массе принять равным $q/m$ = = $10^8$ Кл/кг.

**10.** Имеется линза с оптической силой $D$ = +2 дптр. Стержень располагают перпендикулярно главной оптической оси поочередно в двух местах на разных расстояниях от линзы (по одну сторону от нее). В обоих случаях линейные размеры оптического изображения оказываются в Г = 10 раз больше длины стержня. Найдите расстояние между этими положениями стержня.

*Публикацию подготовили А.Бородин, В.Галкин, Н.Григоренко, Е.Григорьев, И.Ломов, Г.Медведев, В.Погожев, А.Разгулин, И.Сергеев, В.Серов, А.Склянкин, В.Сушко, В.Ушаков, М.Федотов, С.Чесноков, Б.Щедрин*