Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1711» или «Ф1718». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1711 предлагалась на городской олимпиаде Костромы, а задачи М1716–М1718 – на XL Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1718, Ф1719, Ф1723, Ф1724 и Ф1727 предлагались на заочном туре VI Соросовской олимпиады по физике, а задачи Ф1720–Ф1722 и Ф1726 – на Московском интеллектуальном марафоне.

Задачи М1711–М1720, Ф1718–Ф1727

М1711. В «Большой энциклопедии кроликов» 10 томов. Они стоят на полке почти по порядку: каждый том стоит либо на своем месте, либо на соседнем. Сколько таких расположений возможно?

Д.Калинин

М1712. а) Несколько треугольников расположены на плоскости так, что каждые четыре из них имеют общую вершину. Докажите, что все треугольники имеют общую вершину.

б) Несколько прямоугольников расположены на плоскости так, что каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все прямоугольники имеют общую вершину.

В.Произволов

М1713. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты такие точки A', B', C', что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке. Пусть D, E, F, D', E', F' – середины отрезков AB, BC, CA, $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Докажите, что

а) прямые DD', EE', FF' имеют общую точку, причем эта точка, точка пересечения прямых AA', BB', CC' и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной прямой;

б) если в качестве прямых AA', BB', CC' взяты высоты треугольника ABC, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром окружности Эйлера (окружности девяти точек) треугольника ABC;

в) если прямые AA', BB', CC' – биссектрисы треугольника ABC, то их общая точка, общая точка прямых DD', EE', FF' и точка пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника ABC и делящих его периметр пополам (точка Нагеля), лежат на одной прямой;

г) если прямые AA', BB', CC' делят периметр треугольника ABC пополам, то точка пересечения прямых DD', EE', FF' совпадает с центром масс контура треугольника ABC.

И.Вайнштейн

М1714. Докажите, что каждое из уравнений

а) $(x^2+1)(y^2-1)=z^2$,

б) $(x^2-1)(y^2-1)=z^2$, где $x \neq y$,

в*) $(x^2+1)(y^2+1)=z^2$, где $x \neq y$,

имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y и z.

В.Сендеров

М1715. Все натуральные числа от 1 до $2n$ записаны в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ такой, что

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|+|a_{2n}-a_1|=2n^2.$$

Докажите, что

$$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+\ldots+|a_{2n-1}-a_{2n}|=n^2.$$

В.Произволов

М1716. В квадрате клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток отмечены N клеток таким образом, что каждая клетка квадрата (отмеченная или неотмеченная) имеет хотя бы одну отмеченную соседнюю клетку. Определите наименьшее возможное значение N, если соседними считать клетки, имеющие общую сторону.

Е.Барабанов, И.Воронович

М1717*. Две окружности Γ_1 и Γ_2, содержащиеся внутри окружности Γ, касаются Γ в различных точках M и N соответственно. Окружность Γ_1 проходит через центр окружности Γ_2. Прямая, проходящая через две точки пересечения Γ_1 и Γ_2, пересекает Γ в точках A и B. Прямые MA и MB пересекают Γ_1 в точках C и D соответственно. Докажите, что CD касается Γ_2.

П.Кожевников

М1718*. Найдите все функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такие, что

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

для всех $x, y \in \boldsymbol{R}$.

(Япония)

М1719. Последовательность a_1, a_2, a_3, ... задана своим первым членом $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

а) Докажите, что $a_{100} > 14$.

б*) Найдите $[a_{1000}]$, т.е. укажите такое целое число m, для которого $m \le a_{1000} < m + 1$.

в) Докажите существование и найдите значение предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n}$.

А.Спивак

М1720*. N одинаковых деревянных кубиков склеены между собой так, что каждые два из них склеены по грани или по участку грани. Докажите, что максимальное значение N равно шести.

В.Произволов

Ф1718. Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью 5 м/с. В некоторый момент его замечает лиса и начинает погоню. Скорость лисы постоянна по величине и равна 4 м/с, а движется она тоже не самым лучшим образом – скорость ее в каждый момент направлена точно в ту точку, где находится заяц. Вначале расстояние между ними уменьшается, затем начинает возрастать. Минимальное расстояние составляет 30 м. Какое ускорение было у лисы в тот момент, когда расстояние стало минимальным?

М.Учителев

Ф1719. В системе, показанной на рисунке 1, силы трения отсутствуют. При каком значении силы F клин и тележка

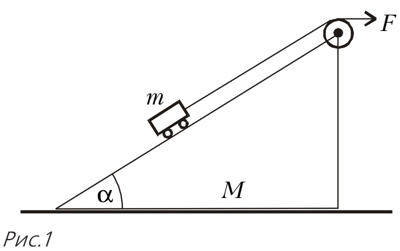


Рис.1

могут двигаться вместе, без проскальзывания? Угол при основании клина α.

А.Клинов

Ф1720. Кусок мела лежит на горизонтальной доске с коэффициентом трения μ. Доску резко начинают двигать в горизонтальном направлении со скоростью v_0, а через время τ резко останавливают. Найдите длину меловой черты на доске.

К.Чертов

Ф1721. В высокий вертикальный сосуд квадратного сечения, разделенный вертикальными перегородками на три части (рис.2), налили до одной и той же высоты горячий суп с температурой +65 °С – в большое отделение, теплый компот при +35 °С и холодный квас при +20 °С. Наружные стенки сосуда очень хорошо теплоизолированы, внутренние перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, не очень хорошо проводящего тепло. Через некоторое время суп остыл на 1 градус. Считая, что все эти жидкости – практически одна вода, определите, на сколько изменились за это время температуры остальных двух жидкостей. Кваса в сосуде столько же, сколько компота, супа – вдвое больше.

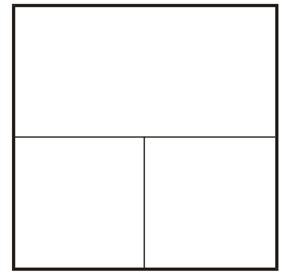


Рис.2

А.Компотов

Ф1722. В закрытом сосуде кроме воздуха содержится некоторое количество воды. Температура внутри сосуда поддерживается равной +100 °С. Начальный объем сосуда 10 л, жидкость при этом занимает очень небольшую часть объема сосуда, а давление составляет ровно 2 атм. При увеличении объема сосуда до 20 л давление в нем упало до 1,4 атм. Считая эти значения точными, найдите массу воздуха в сосуде. А сколько молекул воды содержится в сосуде?

З.Рафаилов

Ф1723. Высокий вертикальный сосуд содержит небольшое количество гелия под поршнем массой M, на который поставлена гиря массой $49M$. В состоянии равновесия поршень «висит» над дном сосуда на высоте h. Гирю снимают с поршня, и он начинает движение вверх. Оцените максимальную высоту подъема поршня. На какой высоте над дном сосуда поршень в конце концов остановится? Считайте при расчете, что трения в системе нет, стенки и поршень совершенно не проводят тепло, а теплоемкость стенок и поршня сосуда очень мала.

А.Повторов

Ф1724. Конденсаторы, емкости которых C, $2C$ и $3C$, соединены друг с другом, как показано на рисунке 3. Конденсатор емкостью $2C$ заряжен до напряжения U_0, остальные два не заряжены. К свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резисторы сопро-

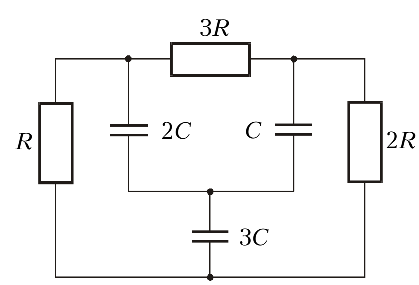


Рис.3

тивлениями R, $2R$ и $3R$. Какое количество теплоты выделится за большое время на каждом из этих резисторов?

А.Зильберман

Ф1725. Катушка индуктивности содержит много витков и намотана из проволоки с высоким удельным сопротивлением. Выводы катушки замкнуты между собой, около катушки расположен сильный постоянный магнит. Магнит очень быстро убирают, при этом в цепи появляется ток. За первые 100 мс выделяется 0,01 Дж тепла, за следующие 100 мс – еще 0,006 Дж. Какое общее количество теплоты выделится в цепи за большое время?

З.Рафаилов

Ф1726. Цепочку из трех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 (рис.4). Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся на каждом из резисторов.

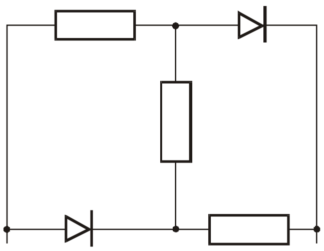


Рис.4

Р.Старов

Ф1727. В большом спортивном зале стены, пол и потолок оклеены звукопоглощающими (полностью поглощающими звук) покрытиями. На высоте h = 5 см от пола находится мощный точечный источник звука частоты f = 2000 Гц, излучающий звуковые волны равномерно во все стороны. Микрофон малых размеров находится на высоте H = 3 м от пола на расстоянии L = 4 м по горизонтали от источника. Подключенный к микрофону чувствительный вольтметр показывает амплитуду переменного напряжения U = 0,01 В. Как изменятся показания этого вольтметра, если удалить звукопоглощающее покрытие на полу под микрофоном? Считайте, что от пола звуковые волны отражаются без потерь энергии. Какими будут показания вольтметра в том случае, когда покрытие на полу будет восстановлено, но оно окажется очень тонким, качеством похуже и будет поглощать только половину падающей энергии волны, а ослабленная волна будет отражаться от пола зеркально?

Р.Александров

Решения задач М1691—М1695, Ф1703—Ф1712

М1691. *Докажите, что любой четырехугольник можно разрезать на три трапеции.*

Если четырехугольник является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется просто, как показано на рисунке 1.

Если же четырехугольник $ABCD$ (выпуклый или невыпуклый) не является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется таким образом.

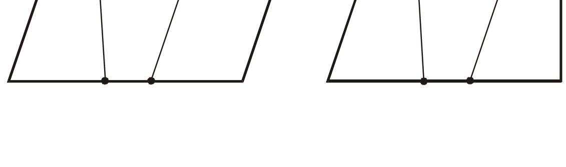


Рис.1

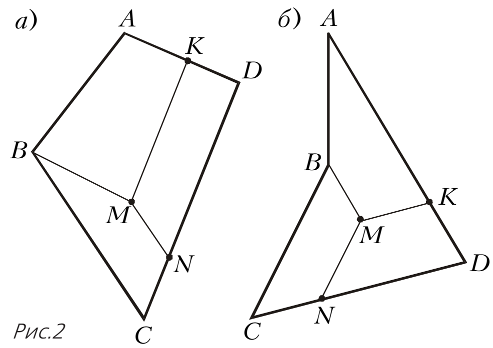


Рис.2

Пусть B – *наибольший* внутренний угол данного четырехугольника $ABCD$. Проведем разрез BM из вершины B, параллельный стороне AD (точка M попадет внутрь четырехугольника). Из точки M проводим разрезы MN и MK, параллельные сторонам BC и CD соответственно (рис.2).

После чего необходимое разрезание налицо.

В.Произволов

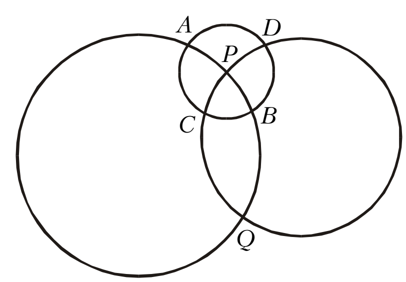
М1692. *Числа a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство*

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

Ввиду неравенства треугольника $a^2>(b-c)^2$. Отсюда $a^2+2bc>b^2+c^2$. Правая часть положительна, и на нее можно разделить. Получаем, что первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства больше 1. То же верно для двух других слагаемых. Поэтому их сумма больше 3.

В.Сендеров

М1693. *Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром в точке P пересекает первую в точках A, B, а вторую – в точках C и D (см. рисунок). Докажите, что углы AQD и BQC равны.*



Треугольники APB и DPC равнобедренные. Обозначим углы при их основаниях $\angle ABP=\angle BAP=\alpha$, $\angle DCP=\angle CDP=\beta$. Четырехугольники $AQBP$ и $DQCP$ вписанные, отсюда $\angle AQP=\angle ABP=\alpha$ и $\angle DQP=\angle DCP=\beta$. Получаем: $\angle AQD=\angle AQP+\angle DQP=\alpha+\beta$. Далее, $\angle BQP=\angle BAP=\alpha$, также $\angle CQP=\beta$ и $\angle BQC=\angle BQP+\angle CQP=\alpha+\beta$. Значит, $\angle AQD=\angle BQC$.

А.Заславский

М1694. *Парабола $y=-x^2+b_1x+c_1$ и парабола $y=-x^2+b_2x+c_2$ касаются параболы $y=ax^2+bx+c$, $a>0$. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам.*

Пусть Π_1, Π_2, Π_3 – данные параболы, KL – общая касательная к Π_1 и Π_2, Π_3 касается Π_1 и Π_2 в точках A и B. Вычтем из всех трех квадратных трехчленов функцию $f(x)=a_3x+b_3$, где $y=a_3x+b_3$ – уравнение прямой AB.