тивлениями R, $2R$ и $3R$. Какое количество теплоты выделится за большое время на каждом из этих резисторов?

А.Зильберман

Ф1725. Катушка индуктивности содержит много витков и намотана из проволоки с высоким удельным сопротивлением. Выводы катушки замкнуты между собой, около катушки расположен сильный постоянный магнит. Магнит очень быстро убирают, при этом в цепи появляется ток. За первые 100 мс выделяется 0,01 Дж тепла, за следующие 100 мс – еще 0,006 Дж. Какое общее количество теплоты выделится в цепи за большое время?

З.Рафаилов

Ф1726. Цепочку из трех одинаковых резисторов сопротивлением R каждый и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 (рис.4). Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся на каждом из резисторов.

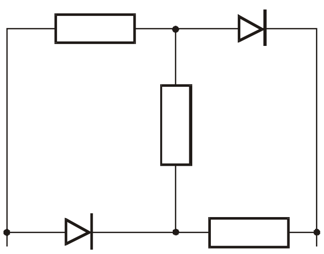


Рис.4

Р.Старов

Ф1727. В большом спортивном зале стены, пол и потолок оклеены звукопоглощающими (полностью поглощающими звук) покрытиями. На высоте h = 5 см от пола находится мощный точечный источник звука частоты f = 2000 Гц, излучающий звуковые волны равномерно во все стороны. Микрофон малых размеров находится на высоте H = 3 м от пола на расстоянии L = 4 м по горизонтали от источника. Подключенный к микрофону чувствительный вольтметр показывает амплитуду переменного напряжения U = 0,01 В. Как изменятся показания этого вольтметра, если удалить звукопоглощающее покрытие на полу под микрофоном? Считайте, что от пола звуковые волны отражаются без потерь энергии. Какими будут показания вольтметра в том случае, когда покрытие на полу будет восстановлено, но оно окажется очень тонким, качеством похуже и будет поглощать только половину падающей энергии волны, а ослабленная волна будет отражаться от пола зеркально?

Р.Александров

Решения задач М1691–М1695, Ф1703–Ф1712

М1691. *Докажите, что любой четырехугольник можно разрезать на три трапеции.*

Если четырехугольник является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется просто, как показано на рисунке 1.

Если же четырехугольник $ABCD$ (выпуклый или невыпуклый) не является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется таким образом.

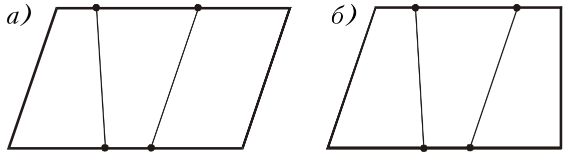


Рис.1

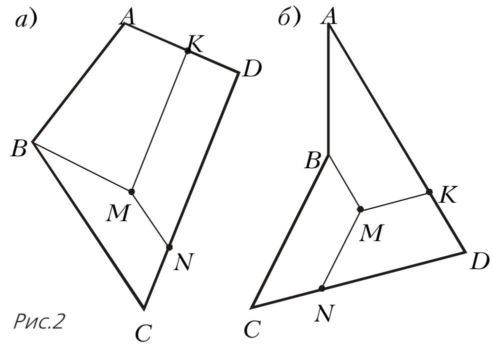


Рис.2

Пусть B – *наибольший* внутренний угол данного четырехугольника $ABCD$. Проведем разрез BM из вершины B, параллельный стороне AD (точка M попадет внутрь четырехугольника). Из точки M проводим разрезы MN и MK, параллельные сторонам BC и CD соответственно (рис.2).

После чего необходимое разрезание налицо.

В.Произволов

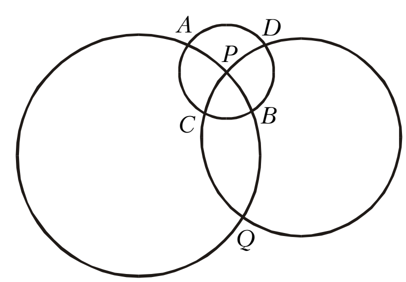
М1692. *Числа a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство*

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

Ввиду неравенства треугольника $a^2 > (b-c)^2$. Отсюда $a^2 + 2bc > b^2 + c^2$. Правая часть положительна, и на нее можно разделить. Получаем, что первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства больше 1. То же верно для двух других слагаемых. Поэтому их сумма больше 3.

В.Сендеров

М1693. *Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром в точке P пересекает первую в точках A, B, а вторую – в точках C и D (см. рисунок). Докажите, что углы AQD и BQC равны.*

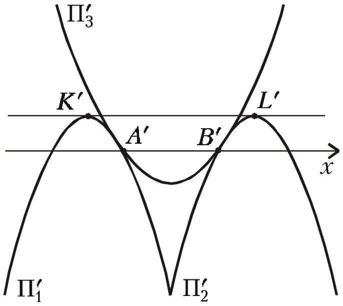


Треугольники APB и DPC равнобедренные. Обозначим углы при их основаниях $\angle ABP = \angle BAP = \alpha$, $\angle DCP = \angle CDP = \beta$. Четырехугольники $AQBP$ и $DQCP$ вписанные, отсюда $\angle AQP = \angle ABP = \alpha$ и $\angle DQP = \angle DCP = \beta$. Получаем: $\angle AQD = \angle AQP + \angle DQP = \alpha + \beta$. Далее, $\angle BQP = \angle BAP = \alpha$, также $\angle CQP = \beta$ и $\angle BQC = \angle BQP + \angle CQP = \alpha + \beta$. Значит, $\angle AQD = \angle BQC$.

А.Заславский

М1694. *Парабола $y = -x^2 + b_1x + c_1$ и парабола $y = -x^2 + b_2x + c_2$ касаются параболы $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам.*

Пусть Π_1, Π_2, Π_3 – данные параболы, KL – общая касательная к Π_1 и Π_2, Π_3 касается Π_1 и Π_2 в точках A и B. Вычтем из всех трех квадратных трехчленов функцию $f(x) = a_3x + b_3$, где $y = a_3x + b_3$ – уравнение прямой AB.



Тогда получим новые параболы Π_1', Π_2', Π_3' (см. рисунок), при этом Π_1' и Π_2' по-прежнему будут касаться параболы Π_3', так как у этих пар парабол по-прежнему будет ровно по одной общей точке A' и B'.

Точки A' и B' лежат на оси Ox, поэтому рисунок симметричен относительно серединного перпендикуляра к отрезку $A'B'$. Из этого следует, что $K'L' \| A'B'$ и, значит, $KL \| AB$.

Р.Карасев

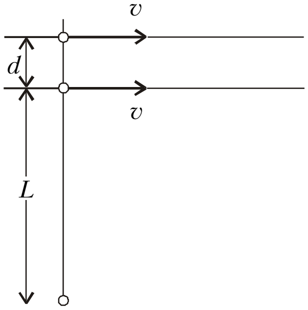
М1695. *Грани правильного октаэдра раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что для любой внутренней точки сумма расстояний до плоскостей черных граней равна сумме расстояний до плоскостей белых граней.*

Плоскости, которым принадлежат грани каждого цвета, образуют равные правильные тетраэдры. Утверждение задачи следует из того, что сумма расстояний от внутренней точки правильного тетраэдра до его граней постоянна и равна утроенному объему тетраэдра, деленному на площадь грани. (Чтобы доказать это, соединим точку с вершинами правильного тетраэдра и рассмотрим объемы образовавшихся частей, основаниями которых являются грани исходного тетраэдра.)

Наметим другое доказательство. Каждую грань октаэдра будем считать основанием тетраэдра с вершиной в данной внутренней точке. Нужно доказать, что сумма объемов четырех «черных» тетраэдров равна сумме объемов четырех «белых». Для читателя, знакомого с принципом Кавальери, это следует из того, что всякое сечение октаэдра, перпендикулярное его диагонали, по равной площади пересекается с «черными» и «белыми» тетраэдрами.

Д.Терешин, В.Произволов

Ф1703. *В компьютерной игре все движется в одной плоскости. Меткий стрелок должен поразить двух злодеев одной пулей. Злодеи двигаются с одинаковыми постоянными скоростями v параллельно друг другу, находясь на расстоянии d один от другого, как показано на рисунке. Соединяющая их прямая перпендикулярна направлению скорости v. В данный момент стрелок находится на продолжении этой прямой – на расстоянии L от ближнего злодея. Пуля после выстрела летит по прямой со скоростью 3v. Пронзая злодея, пуля не меняет ни направления движения, ни величины своей скорости. В какой момент нужно стрелять и под каким углом к направлению движения злодеев нужно выпустить пулю? На сколько дольше ближнего проживет дальний злодей?*



Поразив первого злодея, пуля продолжает лететь вдоль той же прямой. Обозначим время, которое пуля летит от одного злодея до другого, через t. Тогда получится прямоугольный треугольник с катетами d и vt и гипотенузой $3vt$. Отсюда сразу находим и время t, и угол α между направлением полета пули и направлением движения злодеев:

$$t = \frac{d}{2\sqrt{2}\,v}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

Элементарные рассуждения показывают, что стрелять нужно как раз в «данный момент».

Я.Злодеев

Ф1704. *По прямому горизонтальному стержню может скользить без трения бусинка массой M (рис.1). К бусинке привязана легкая нерастяжимая нитка длиной L. Нитку мы тянем за свободный конец так, что скорость этого конца все время направлена вдоль нити и равна по величине v_0. С какой силой нужно тянуть в тот момент, когда нить направлена под углом α к стержню? Нить все время находится в горизонтальной плоскости.*

Если бы скорость свободного конца нити была постоянной (а это не так – вектор скорости все время поворачивается), можно было бы «пересесть» в систему отсчета, которая связана с этим концом, – в такой системе бусинка движется по окружности и можно легко записать необходимые уравнения. В нашем же случае система получилась бы неинерциальной, и никакого упрощения мы не получили бы. Будем действовать так. Нить нерастяжима – это позволит связать скорости концов нити при заданном значении угла α. Дальше зададим очень малый интервал времени Δt, найдем новое положение бусинки и новое значение угла. После этого выразим новую скорость и найдем ее приращение за выбранный интервал Δt. Таким образом мы вычислим ускорение бусинки, после чего силу уже будет совсем просто найти. Итак, пусть для угла α скорость бусинки равна u (рис.2), причем

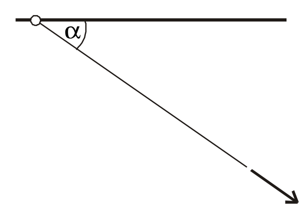


Рис.1

$$u\cos\alpha = v_0.$$

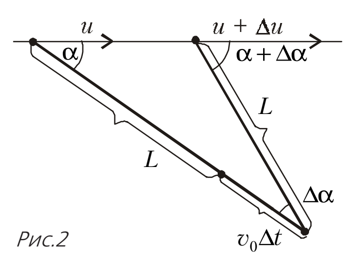


Рис.2

Через малый интервал Δt конец нити сместится на $v_0\Delta t$, бусинка проедет $u\Delta t$, и теперь можно записать новое равенство

$$(u + \Delta u)\cos(\alpha + \Delta\alpha) = v_0.$$

Раскрывая скобки, пользуясь известным выражением для косинуса суммы углов и заменяя конус малого угла на 1, а синус на значение угла, получим

$$\Delta u\cos\alpha = u\sin\alpha\cdot\Delta\alpha.$$

Величину приращения угла можно найти из геометрических соображений – например, используя теорему синусов

$$\frac{u\Delta t}{\sin\Delta\alpha} = \frac{L}{\sin\alpha}.$$

Заменяя синус малого угла $\Delta\alpha$ значением самого угла, найдем

$$\Delta\alpha = \frac{u\Delta t\sin\alpha}{L}.$$

После простых преобразований получим

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u^2 \frac{\sin^2\alpha}{L\cos\alpha} = v_0^2 \frac{\sin^2\alpha}{L\cos^3\alpha}.$$

Дальше уже совсем просто. Запишем уравнение второго закона Ньютона для бусинки:

$$T\cos\alpha = M\frac{\Delta u}{\Delta t} = Mv_0^2 \frac{\sin^2\alpha}{L\cos^3\alpha},$$

откуда найдем искомую силу T:

$$T = Mv_0^2 \frac{\sin^2\alpha}{L\cos^4\alpha}.$$

А.Зильберман

Ф1705. *В показанной на рисунке 1 системе трение есть между большим телом и горизонтальной поверхностью стола, а также между большим телом и верхним грузом. Обозначим коэффициент трения наверху μ_1, а внизу μ_2. При каких значениях коэффициентов трения большое тело может оставаться неподвижным?*

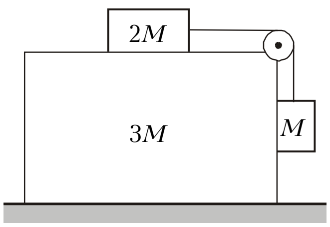


Рис.1

Если коэффициент трения наверху достаточно велик, чтобы при неподвижном теле массой $3M$ грузы не двигались, то при любом значении коэффициента трения внизу большое тело проскальзывать не будет. Для этого нужно, чтобы

$$2Mg\mu_1 \ge Mg, \text{ или } \mu_1 \ge 0{,}5.$$

В этом случае при любом коэффициенте трения внизу μ_2 большое тело будет оставаться неподвижным.

Рассмотрим теперь ситуацию, при которой грузы массами M и $2M$ могут двигаться, а большое тело остается неподвижным (рис.2; здесь показаны силы, действующие только на большое тело). В этом случае силу натяжения нити найти легко:

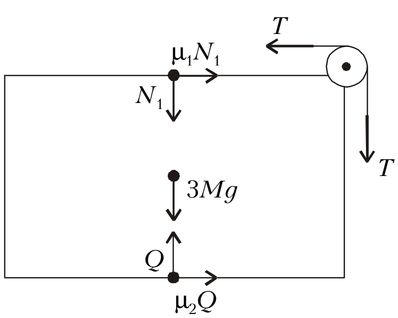


Рис.2

$$T = \frac{2Mg(1+\mu_1)}{3}.$$

Тогда для движения большого тела по горизонтали при минимальном значении коэффициента трения μ_2 запишем

$$2Mg\mu_1 - T = (5Mg + T)\mu_2,$$

откуда после простых преобразований получим соотношение

$$\mu_2 \ge \frac{2-4\mu_1}{17+2\mu_1}.$$

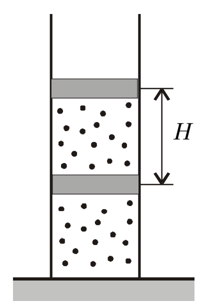
Р.Александров

Ф1706. *В тонкостенный стакан налили 200 г воды и при помощи опущенного в воду нагревателя постоянной мощности 50 Вт стараются вскипятить воду. Ничего не получается – вода никак не нагревается выше 60 °С. Выключим нагреватель и накроем стакан листком бумаги – вода при этом остынет от 60 °С до 59 °С за 20 секунд. Если бы мы не накрывали стакан листком бумаги, а вместо этого поставили его на теплоизолирующую пробковую подставку, то вода в стакане остыла бы от 60 °С до 59 °С за 30 секунд. Повторим теперь нагревание, но стакан установим на подставку и накроем его листком бумаги. Сколько времени займет в этом случае нагрев воды от 59 °С до 60 °С?*

Из условия задачи ясно, что при температуре 60 °С потери тепловой мощности в окружающее пространство достигают 50 Вт. Основные причины ухода тепла – испарение, теплопередача через дно стакана и через его боковую поверхность. При помощи листка бумаги мы снижаем потери на испарение, а пробковая подставка убирает теплопередачу через дно стакана. Остывая на 1 градус за 20 секунд в первом случае, наша порция воды отдает в окружающую среду $\frac{4200\cdot 0{,}2\cdot 1}{20}$ Вт = 42 Вт, значит, потери на испарение составляют 8 Вт. При остывании с подставкой за 30 секунд стакан отдает мощность 28 Вт, значит, потери тепла через дно подставка уменьшает на 22 Вт. Оба приспособления вместе снизят отдаваемую мощность на 30 Вт; следовательно, эти 30 из 50 Вт будут идти на нагревание воды. На 1 градус при этих условиях вода нагреется за $840/30$ с = 28 с. При решении задачи мы считали, что мощность потерь в диапазоне 59–60 градусов практически постоянна.

А.Простов

Ф1707. *Вертикальный цилиндрический сосуд содержит две порции газа, отделенные друг от друга и от окружающего пространства двумя одинаковыми массивными поршнями массой М каждый (см. рисунок). В верхней части сосуда находится кислород, в нижней – гелий. Вначале объемы порций одинаковы и расстояние между поршнями составляет Н. Нижнюю часть газа медленно нагревают. Какое количество теплоты нужно сообщить гелию в нижней части сосуда, чтобы увеличить его объем в два раза? Каким станет расстояние между поршнями через большой интервал времени – когда температуры порций газа снова сравняются? Теплоемкостью стенок и поршней пренебречь. Снаружи воздух откачан, теплоотдача в окружающее пространство пренебрежимо мала. Теплопроводность поршня, разделяющего порции газа, достаточно мала – за время нагрева тепло в верхнюю полость практически не поступает.*



По условию задачи поршни массивные, и мы будем пренебрегать массой газа по сравнению с массой поршня (все равно масса газа в условии задачи не задана). При нагревании нижняя порция газа расширяется при неизменном давлении $p = 2Mg/S$, где S – площадь сечения сосуда. Начальные температуры порций газа одинаковы, давление внизу вдвое больше – получается, что в нижней части сосуда количество газа вдвое больше, чем в верхней. Количество теплоты, которое необходимо сообщить гелию, будет равно

$$Q = \nu C_p(T_2 - T_1) = \nu\cdot 2{,}5R(T_2 - T_1) =$$

$$= 2{,}5p(2V - V) = 2{,}5\frac{2Mg}{S}SH = 5MgH.$$

После выравнивания температур объемы порций газа снова сравняются. Для нахождения нового расстояния h между поршнями воспользуемся законом сохранения энергии. Поскольку система теплоизолирована, ее полная энергия должна оставаться неизменной. После нагревания нижней порции газа суммарная потенциальная энергия поршней будет

$$Mg \cdot 2H + Mg \cdot 3H = 5MgH\,,$$

а полная энергия —

$$5MgH + 1{,}5\nu RT + 1{,}5 \cdot 2\nu R \cdot 2T =$$
$$= 5MgH + 1{,}5MgH + 1{,}5 \cdot 4MgH = 12{,}5MgH\,.$$

После выравнивания температур полная энергия составит

$$Mgh + 2Mgh + 1{,}5 \cdot 3\nu RT_1 = 7{,}5Mgh\,.$$

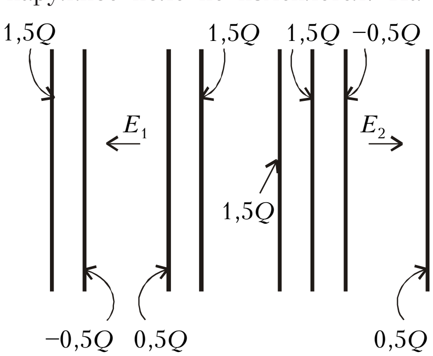
В соответствии с законом сохранения энергии найдем

$$h = \frac{5H}{3}\,.$$

З.Рафаилов

Ф1708. *Плоский конденсатор емкостью C составлен из двух больших проводящих пластин, каждая из которых сделана двухслойной – из соединенных друг с другом листов тонкой фольги. Пластины несут одноименные заряды Q и 2Q. Наружный слой фольги пластины с большим зарядом аккуратно отсоединяют, относят в сторону параллельно другим пластинам и приносят на другое место – третьим слоем снаружи к пластине с зарядом Q. При этом не допускают электрического контакта с этой пластиной – оставляют очень узкий зазор. Какую работу необходимо при этом совершить? Все действия мы производим издали, стараясь не влиять на распределение зарядов пластин.*

Поле снаружи от конденсатора при таком выборе зарядов пластин ненулевое (в отличие от случая равенства нулю полного заряда пластин конденсатора), однако при любой перестановке пластин меняется только поле внутри, а наружное поле не изменяется. На наружных сторонах двух обкладок конденсатора (см. рисунок) собираются одинаковые по знаку и величине заряды – каждый из них равен половине полного заряда конденсатора (у «правильно» заряженного конденсатора эта полусумма равна нулю) – в нашем случае это $1{,}5Q$. На внутренних сторонах обкладок получаем заряды $-0{,}5Q$ и $0{,}5Q$. Поле внутри определяется именно последними зарядами – поля наружных зарядов в этой области скомпенсированы. Энергию поля, сосредоточенного между пластинами, можно вычислить по обычной формуле:



$$W_1 = \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{Q^2}{8C}\,.$$

После отсоединения наружной части обкладки с зарядом $2Q$ заряды внешней пластины на ней остались, и мы их перенесли на другую сторону. Теперь заряды пластин получившегося конденсатора равны $2{,}5Q$ и $0{,}5Q$. Поле между обкладками изменило направление (для расчета энергии это не важно) и увеличилось в 2 раза. Энергия поля, сосредоточенного между пластинами, возросла при этом в 4 раза и составляет теперь

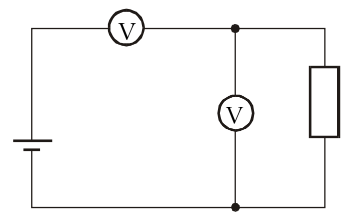
$$W_2 = \frac{Q^2}{2C}\,.$$

Поле снаружи не изменилось, следовательно, наша работа пошла на увеличение энергии поля между обкладками. Тогда необходимая для переноса работа равна

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{8C} = \frac{3Q^2}{8C}\,.$$

З.Рафаилов

Ф1709. *Два одинаковых вольтметра соединены последовательно и подключены к батарейке (см. рисунок). Параллельно одному из вольтметров подключен резистор, при этом показания вольтметров составляют 1,4 В и 3,1 В. Отключим теперь один из вольтметров. Что будет показывать оставшийся прибор? Напряжение батарейки можно считать неизменным.*



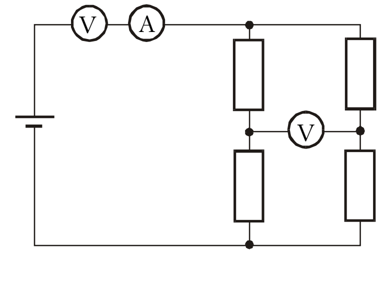
Если отключить верхний вольтметр, показания нижнего упадут до нуля.

Рассмотрим теперь второй случай – отключение правого вольтметра. Нам нужно найти отношение сопротивлений резистора и вольтметра (из условия ясно, что вольтметры вовсе не идеальные). Это легко сделать так: в исходной схеме один из вольтметров показывает 3,1 В, а другой – только 1,4 В. Это значит, что ток через верхний вольтметр больше тока нижнего в $3{,}1/1{,}4$ раз, и разностный ток течет через резистор. Легко видеть, что отношение этого тока к току параллельно включенного вольтметра составит $(3{,}1 - 1{,}4)/1{,}4 = 17/14$. Ясно, что это отношение определяется обратным отношением сопротивлений, поэтому сопротивление вольтметра больше сопротивления резистора в $17/14$ раз. Напряжение батарейки, равное $(3{,}1 + 1{,}4)$ В = 4,5 В, можно считать неизменным – нагрузки высокоомные и влияние внутреннего сопротивления несущественно. Тогда напряжение вольтметра в оставшейся последовательной схеме составит

$$4{,}5\frac{17}{14+17}\text{ В} \approx 2{,}47\text{ В}.$$

Р.Схемов

Ф1710. *В приведенной на рисунке схеме использованы одинаковые вольтметры. Сопротивления двух резисторов одинаковы и равны каждый по R, двух других – по 3R. Показания приборов составляют 2 мА, 3 В и 0,5 В. Най-*



дите по этим данным величину R.

Легко понять, что показание вольтметра, который включен в диагональ мостика, должно быть меньше – через него течет только часть полного тока. Ясно, что эта часть составляет $0{,}5/3 = 1/6$. Мостик не должен быть уравновешен – иначе вольтметр в диагонали показал бы ноль. Тогда можно решить задачу устно. Сумма токов через резисторы сопротивлениями R и $3R$ равна полному току 2 мА. Разность таких же токов равна одно шестой этого значения, т.е. 1/3 мА. Значит, токи эти равны 7/6 мА и 5/6 мА соответственно. Напряжение на резисторе сопротивлением $3R$ равно произведению меньшего тока на это сопротивление, т.е. $15R/6$ (В), напряжение на меньшем резисторе составляет $7R/6$ (В). Разность этих напряжений равна 0,5 В. Тогда $8R/6 = 0{,}5$, откуда

$$R = 3/8 \text{ кОм} = 0{,}375 \text{ кОм} = 375 \text{ Ом}.$$

При решении мы использовали соображения симметрии – в этой схеме токи через одинаковые резисторы равны между собой.

Р.Схемов

Ф1711. *Резистор сопротивлением 100 Ом подключен к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (идеальный диод имеет нулевое сопротивление при пропускании через него тока одной полярности и бесконечное сопротивление при попытке пропустить ток другой полярности). Найдите среднюю мощность, выделяющуюся в резисторе в виде тепла. Во сколько раз изменится эта мощность при подключении параллельно резистору конденсатора емкостью 1 мкФ? А при подключении конденсатора емкостью 1000 мкФ?*

Легко подсчитать мощность без подключения конденсаторов: диод «убирает» половину каждого периода, уменьшая мощность вдвое, т.е.

$$P = \frac{0{,}5U^2}{R} = \frac{0{,}5(220)^2}{100} \text{ Вт} = 242 \text{ Вт}$$

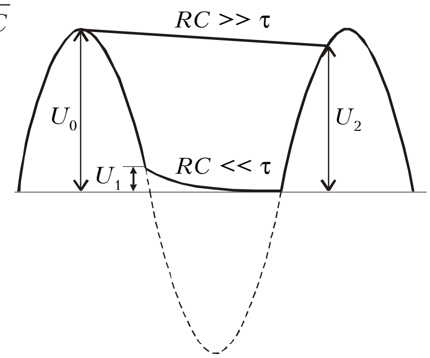
(220 В – это действующее, или эффективное значение напряжения).

Если параллельно резистору включить конденсатор очень большой емкости, то напряжение на резисторе перестанет быть переменным – оно постоянно будет равно амплитудному значению напряжения сети, и мощность возрастет ровно вчетверо (понятно, что конденсатор не дает лишней энергии – он просто помогает резистору эффективнее грабить источник). При очень малой емкости конденсатора мощность останется практически такой же, как и без него.

Теперь нужно понять – что же такое «очень большая» и «очень маленькая» емкости, что с чем тут нужно сравнивать. Проще всего сравнить период сетевого напряжения: при частоте 50 Гц он составляет 0,02 с и так называемое характерное время τ для цепи конденсатор—резистор: оно определяется произведением RC и для конденсатора емкостью 1 мкФ составляет 0,0001 с, а для конденсатора емкостью 1000 мкФ – 0,1 с.

Все это очень мило и грамотно, но это все же не решение нашей задачи – полное решение должно включать разумную числовую оценку изменения мощности при подключении каждого конденсатора. Для конденсатора емкостью 1 мкФ нужно разобраться, в какой момент диод запирается и конденсатор начинает снабжать накопленной энергией резистор. Если диод заперт, а напряжение конденсатора U, то ток равен $I = U/R$ (пока напряжение конденсатора не успело заметно упасть), при этом скорость уменьшения напряжения конденсатора со временем равна

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{(\Delta Q/C)}{\Delta t} = \frac{U}{RC}$$



Если напряжение сети в этот момент спадает круче, то диод остается закрытым – чем дальше, тем круче спадает напряжение сети (пока не достигнет нуля), а конденсатор, наоборот, разряжается все медленнее (см. рисунок). В противном случае диод снова откроется, и конденсатор будет подключен к источнику (придется ждать уменьшения напряжения). Возьмем производную по времени от переменного напряжения сети (нам нужен спадающий участок) и приравняем полученному выше выражению для напряжения конденсатора (это тоже спадающая функция, производная ее отрицательна). Пусть напряжение в сети меняется по закону $U(t) = U_0 \cos \omega t$, тогда получим

$$-U_0 \omega \sin \omega t = -\frac{U_0 \cos \omega t}{RT}.$$

Для частоты 50 Гц имеем $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$. Получается, что диод запирается при напряжении, примерно равном $U_1 = 9{,}8$ В, и накопленную энергию при запирании диода конденсатор 50 раз в секунду будет отдавать резистору, создавая добавочную мощность

$$P_1 \approx f\frac{CU_1^2}{2} = 50 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100}{2} \text{ Вт} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Но по сравнению со схемой без конденсатора мы несколько завысили оценку добавочной мощности – при запертом диоде в резистор не поступает мощность от сети, которая меньше мощности, отдаваемой конденсатором, но все же не равна нулю. Учет этой мощности снижает добавку еще примерно в три раза.

Для конденсатора большой емкости тоже нужно уточнить расчет – ведь напряжение его не остается равным амплитуде сети, а медленно спадает (до U_2). Приблизительный учет этого уменьшения можно провести, считая ток разряда близким к постоянному. Аккуратный расчет показывает, что при подключении конденсатора емкостью 1000 мкФ мощность возрастает не в 4, а примерно в 3,5 раза. В общем, кроме разговоров о том, что какая-то величина очень-очень мала, должна быть и разумная оценка этой величины, пусть и грубая.

А.Теплов

Ф1712. *Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления n = 1,5 и имеет диаметр D = 5 см. Радиус выпуклой сферической поверхности R = 5 см. На плоскую поверхность линзы вдоль ее главной оптической оси падает широкий параллельный пучок* *лучей. Определите размер пятна на экране, расположенном за линзой перпендикулярно падающему пучку. Положение экрана было выбрано по минимальному размеру светлого пятна при узком (ограниченном диафрагмой) пучке лучей вдоль главной оптической оси.*

Линза в условии задачи расположена самым простым для расчета способом – параллельный пучок падает вначале перпендикулярно на плоскую поверхность линзы и не преломляется, поэтому считать преломление приходится только на сферической границе раздела стекло—воздух. Найдем толщину линзы d (в самом толстом месте):

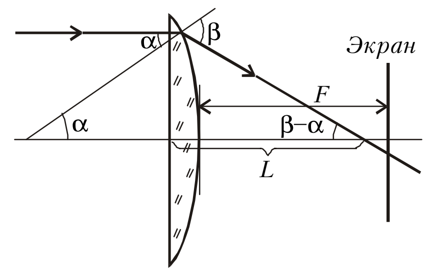
$$R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (R-d)^2,$$

откуда

$$d = 0{,}67 \text{ см}.$$

Толщина линзы для нас важна потому, что расстояния придется отсчитывать от разных точек поверхности линзы. Для тонкого (диафрагмированного) пучка, параллельного главной оптической оси линзы, изображение получится в фокусе на расстоянии

$$F = \frac{R}{n-1} = 10 \text{ см}.$$



Рассмотрим самый удаленный от главной оптической оси луч (см. рисунок) – для него угол падения, измеренный относительно радиуса, проведенного в точку преломления на сферической поверхности, равен $\alpha = 30°$, так как $\sin\alpha = (D/2)/R = 0{,}5$. Угол преломления находим по значению синуса: $\sin\beta = n\sin\alpha = 0{,}75$, $\beta = 48{,}6°$. После простых расчетов находим точку главной оптической оси, через которую этот луч пройдет. Она находится на расстоянии $L = (D/2)\operatorname{ctg}(\beta-\alpha)$ от плоской поверхности линзы. С учетом толщины линзы получим, что крайние лучи пучка после преломления пересекаются на расстоянии 3,2 см от экрана, что дает диаметр светлого пятна примерно 2,2 см. Интересно исследовать вопрос: а не найдутся ли лучи, которые дают больший диаметр пучка, чем полученный нами для крайних лучей?