

тивлениями  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ . Какое количество теплоты выделится за большое время на каждом из этих резисторов?

*А.Зильберман*

**Ф1725.** Катушка индуктивности содержит много витков и намотана из проволоки с высоким удельным сопротивлением. Выводы катушки замкнуты между собой, около катушки расположен сильный постоянный магнит. Магнит очень быстро убирают, при этом в цепи появляется ток. За первые 100 мс выделяется 0,01 Дж тепла, за следующие 100 мс – еще 0,006 Дж. Какое общее количество теплоты выделится в цепи за большое время?

*З.Рафаилов*

**Ф1726.** Цепочку из трех одинаковых резисторов сопротивлением  $R$  каждый и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой  $U_0$  (рис.4). Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся на каждом из резисторов.

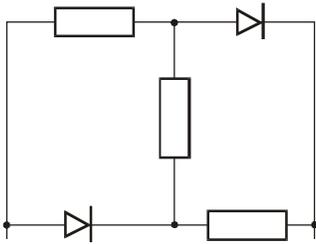


Рис.4

Р.Старов

**Ф1727.** В большом спортивном зале стены, пол и потолок оклеены звукопоглощающими (полностью поглощающими звук) покрытиями. На высоте  $h = 5$  см от пола находится мощный точечный источник звука частоты  $f = 2000$  Гц, излучающий звуковые волны равномерно во все стороны. Микрофон малых размеров находится на высоте  $H = 3$  м от пола на расстоянии  $L = 4$  м по горизонтали от источника. Подключенный к микрофону чувствительный вольтметр показывает амплитуду переменного напряжения  $U = 0,01$  В. Как изменятся показания этого вольтметра, если удалить звукопоглощающее покрытие на полу под микрофоном? Считайте, что от пола звуковые волны отражаются без потерь энергии. Какими будут показания вольтметра в том случае, когда покрытие на полу будет восстановлено, но оно окажется очень тонким, качеством похуже и будет поглощать только половину падающей энергии волны, а ослабленная волна будет отражаться от пола зеркально?

*Р.Александров*

**Решения задач**

**M1691–M1695, Ф1703–Ф1712**

**M1691.** Докажите, что любой четырехугольник можно разрезать на три трапеции.

Если четырехугольник является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется просто, как показано на рисунке 1.

Если же четырехугольник  $ABCD$  (выпуклый или невыпуклый) не является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется таким образом.

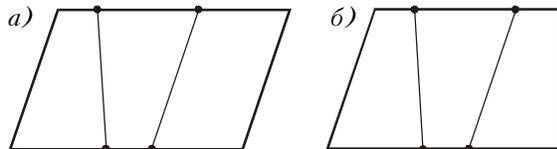


Рис.1

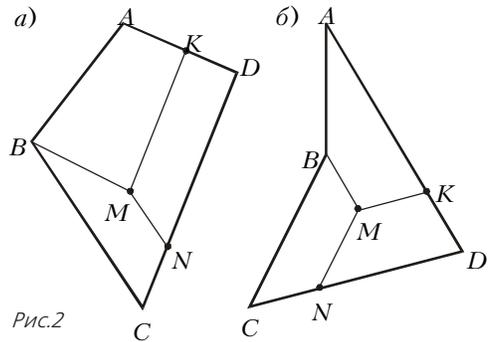


Рис.2

Пусть  $B$  – наибольший внутренний угол данного четырехугольника  $ABCD$ . Проведем разрез  $BM$  из вершины  $B$ , параллельный стороне  $AD$  (точка  $M$  попадет внутрь четырехугольника). Из точки  $M$  проводим разрезы  $MN$  и  $MK$ , параллельные сторонам  $BC$  и  $CD$  соответственно (рис.2).

После чего необходимое разрезание налицо.

*В.Произволов*

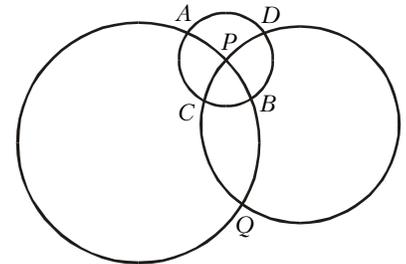
**M1692.** Числа  $a, b, c$  – длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ca}{c^2 + a^2} + \frac{c^2 + 2ab}{a^2 + b^2} > 3.$$

Ввиду неравенства треугольника  $a^2 > (b - c)^2$ . Отсюда  $a^2 + 2bc > b^2 + c^2$ . Правая часть положительна, и на нее можно разделить. Получаем, что первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства больше 1. То же верно для двух других слагаемых. Поэтому их сумма больше 3.

*В.Сеидеров*

**M1693.** Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Третья окружность с центром в точке  $P$  пересекает первую в точках  $A, B$ , а вторую – в точках  $C$  и  $D$  (см. рисунок). Докажите, что углы  $AQD$  и  $BQC$  равны.



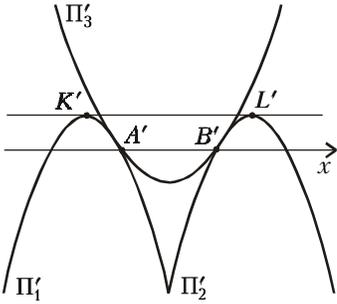
Треугольники  $APB$  и  $DPC$  равнобедренные. Обозначим углы при их основаниях  $\angle ABP = \angle BAP = \alpha$ ,  $\angle DCP = \angle CDP = \beta$ .

Четырехугольники  $AQBP$  и  $DQCP$  вписанные, отсюда  $\angle AQP = \angle ABP = \alpha$  и  $\angle DQP = \angle DCP = \beta$ . Получаем:  $\angle AQD = \angle AQP + \angle DQP = \alpha + \beta$ . Далее,  $\angle BQP = \angle BAP = \alpha$ , также  $\angle CQP = \beta$  и  $\angle BQC = \angle BQP + \angle CQP = \alpha + \beta$ . Значит,  $\angle AQD = \angle BQC$ .

*А.Заславский*

**M1694.** Парабола  $y = -x^2 + b_1x + c_1$  и парабола  $y = -x^2 + b_2x + c_2$  касаются параболы  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a > 0$ . Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам.

Пусть  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  – данные параболы,  $KL$  – общая касательная к  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  касается  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  в точках  $A$  и  $B$ . Вычтем из всех трех квадратных трехчленов функцию  $f(x) = a_3x + b_3$ , где  $y = a_3x + b_3$  – уравнение прямой  $AB$ .



Тогда получим новые параболы  $\Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3$  (см. рисунок), при этом  $\Pi'_1$  и  $\Pi'_2$  по-прежнему будут касаться параболы  $\Pi'_3$ , так как у этих пар парабол по-прежнему будет ровно по одной общей точке  $A'$  и  $B'$ .

Точки  $A'$  и  $B'$  лежат на оси  $Ox$ , поэтому рисунок симметричен относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $A'B'$ . Из этого следует, что  $K'L' \parallel A'B'$  и, значит,  $KL \parallel AB$ .

Р.Карасев

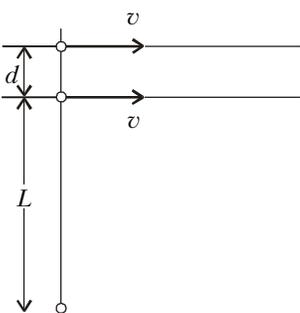
**М1695.** Грани правильного октаэдра раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что для любой внутренней точки сумма расстояний до плоскостей черных граней равна сумме расстояний до плоскостей белых граней.

Плоскости, которым принадлежат грани каждого цвета, образуют равные правильные тетраэдры. Утверждение задачи следует из того, что сумма расстояний от внутренней точки правильного тетраэдра до его граней постоянна и равна утроенному объему тетраэдра, деленному на площадь грани. (Чтобы доказать это, соединим точку с вершинами правильного тетраэдра и рассмотрим объемы образовавшихся частей, основаниями которых являются грани исходного тетраэдра.)

Наметим другое доказательство. Каждую грань октаэдра будем считать основанием тетраэдра с вершиной в данной внутренней точке. Нужно доказать, что сумма объемов четырех «черных» тетраэдров равна сумме объемов четырех «белых». Для читателя, знакомого с принципом Кавальери, это следует из того, что всякое сечение октаэдра, перпендикулярное его диагонали, по равной площади пересекается с «черными» и «белыми» тетраэдрами.

Д.Терешин, В.Произволов

**Ф1703.** В компьютерной игре все движется в одной плоскости. Меткий стрелок должен поразить двух злодеев одной пулей. Злодеи движутся с одинаковыми постоянными скоростями  $v$  параллельно друг другу, находясь на расстоянии  $d$  один от другого, как показано на рисунке. Соединяющая их прямая перпендикулярна направлению скорости  $v$ . В данный момент стрелок находится на продолжении этой прямой – на расстоянии  $L$  от ближнего злодея. Пуля после выстрела летит по прямой со скоростью  $3v$ . Пронзая злодея, пуля не меняет ни направления движения, ни величины своей скорости. В какой момент нужно стрелять и под каким углом к направлению движения злодеев нужно выпустить пулю? На сколько дольше ближнего проживет дальний злодей?



Поразив первого злодея, пуля продолжает лететь вдоль той же прямой. Обозначим время, которое пуля летит от одного злодея до другого, через  $t$ . Тогда получится прямоугольный треугольник

с катетами  $d$  и  $vt$  и гипотенузой  $3vt$ . Отсюда сразу находим и время  $t$ , и угол  $\alpha$  между направлением полета пули и направлением движения злодеев:

$$t = \frac{d}{2\sqrt{2}v}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Элементарные рассуждения показывают, что стрелять нужно как раз в «данный момент».

Я.Злодеев

**Ф1704.** По прямому горизонтальному стержню может скользить без трения бусинка массой  $M$  (рис.1). К бусинке привязана легкая нерастяжимая нитка длиной  $L$ . Нитку мы тянем за свободный конец так, что скорость этого конца все время направлена вдоль нити и равна по величине  $v_0$ . С какой силой нужно тянуть в тот момент, когда нить направлена под углом  $\alpha$  к стержню? Нить все время находится в горизонтальной плоскости.

Если бы скорость свободного конца нити была постоянной (а это не так – вектор скорости все время поворачивается), можно было бы «пересест» в систему отсчета, которая связана с этим концом, – в такой системе бусинка движется по окружности и можно легко записать необходимые уравнения. В нашем же случае система получилась бы неинерциальной, и никакого упрощения мы не получили бы. Будем действовать так. Нить нерастяжима – это позволит связать скорости концов нити при заданном значении угла  $\alpha$ . Дальше зададим очень малый интервал времени  $\Delta t$ , найдем новое положение бусинки и новое значение угла. После этого выразим новую скорость и найдем ее приращение за выбранный интервал  $\Delta t$ . Таким образом мы вычислим ускорение бусинки, после чего силу уже будет совсем просто найти. Итак, пусть для угла  $\alpha$  скорость бусинки равна  $u$  (рис.2), причем

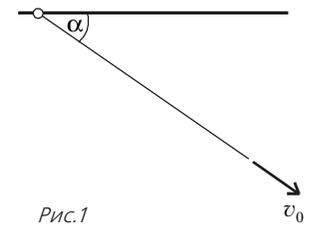


Рис.1

$$u \cos \alpha = v_0.$$

Через малый интервал  $\Delta t$  конец нити сместится на  $v_0 \Delta t$ , бусинка проедет  $u \Delta t$ , и теперь можно записать новое равенство

$$(u + \Delta u) \cos(\alpha + \Delta \alpha) = v_0.$$

Раскрывая скобки, пользуясь известным выражением для косинуса суммы углов и заменяя конус малого угла на 1, а синус на значение угла, получим

$$\Delta u \cos \alpha = u \sin \alpha \cdot \Delta \alpha.$$

Величину приращения угла можно найти из геометрических соображений – например, используя теорему синусов

$$\frac{u \Delta t}{\sin \Delta \alpha} = \frac{L}{\sin \alpha}.$$

Заменяя синус малого угла  $\Delta \alpha$  значением самого угла, найдем

$$\Delta \alpha = \frac{u \Delta t \sin \alpha}{L}.$$

После простых преобразований получим

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos \alpha} = v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos^3 \alpha}.$$

Дальше уже совсем просто. Запишем уравнение второго закона Ньютона для бусинки:

$$T \cos \alpha = M \frac{\Delta u}{\Delta t} = M v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos^3 \alpha},$$

откуда найдем искомую силу  $T$ :

$$T = M v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{L \cos^4 \alpha}.$$

А.Зильберман

**Ф1705.** В показанной на рисунке 1 системе трение есть между большим телом и горизонтальной поверхностью стола, а также между большим телом и верхним грузом. Обозначим коэффициент трения наверху  $\mu_1$ , а внизу  $\mu_2$ . При каких значениях коэффициентов трения большое тело может оставаться неподвижным?

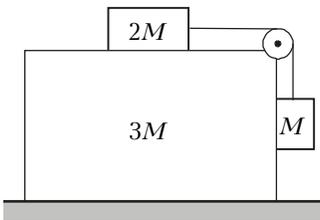


Рис.1

Если коэффициент трения наверху достаточно велик, чтобы при неподвижном теле массой  $3M$  грузы не двигались, то при любом значении коэффициента трения внизу большое тело проскальзывать не будет. Для этого нужно, чтобы

$$2Mg\mu_1 \geq Mg, \text{ или } \mu_1 \geq 0,5.$$

В этом случае при любом коэффициенте трения внизу  $\mu_2$  большое тело будет оставаться неподвижным.

Рассмотрим теперь ситуацию, при которой грузы массы  $M$  и  $2M$  могут двигаться, а большое тело остается неподвижным (рис.2; здесь показаны силы, действующие только на большое тело). В этом случае силу натяжения нити найти легко:

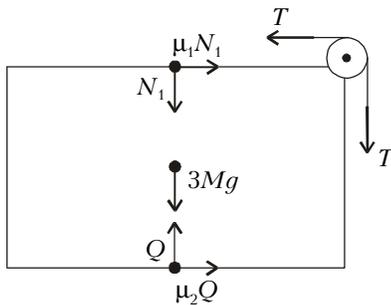


Рис.2

$$T = \frac{2Mg(1 + \mu_1)}{3}.$$

Тогда для движения

большого тела по горизонтали при минимальном значении коэффициента трения  $\mu_2$  запишем

$$2Mg\mu_1 - T = (5Mg + T)\mu_2,$$

откуда после простых преобразований получим соотношение

$$\mu_2 \geq \frac{2 - 4\mu_1}{17 + 2\mu_1}.$$

Р.Александров

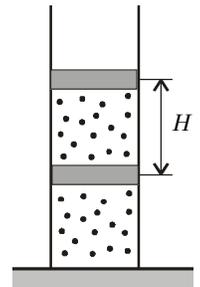
**Ф1706.** В тонкостенный стакан налили 200 г воды и при помощи опущенного в воду нагревателя постоянной мощности 50 Вт стараются вскипятить воду. Ничего не получается – вода никак не нагревается выше 60 °С. Выключим

нагреватель и накроем стакан листком бумаги – вода при этом остынет от 60 °С до 59 °С за 20 секунд. Если бы мы не накрывали стакан листком бумаги, а вместо этого поставили его на теплоизолирующую пробковую подставку, то вода в стакане остыла бы от 60 °С до 59 °С за 30 секунд. Повторим теперь нагревание, но стакан установим на подставку и накроем его листком бумаги. Сколько времени займет в этом случае нагрев воды от 59 °С до 60 °С?

Из условия задачи ясно, что при температуре 60 °С потери тепловой мощности в окружающее пространство достигают 50 Вт. Основные причины ухода тепла – испарение, теплопередача через дно стакана и через его боковую поверхность. При помощи листка бумаги мы снижаем потери на испарение, а пробковая подставка убирает теплопередачу через дно стакана. Остывая на 1 градус за 20 секунд в первом случае, наша порция воды отдает в окружающую среду  $\frac{4200 \cdot 0,2 \cdot 1}{20}$  Вт = 42 Вт, значит, потери на испарение составляют 8 Вт. При остывании с подставкой за 30 секунд стакан отдает мощность 28 Вт, значит, потери тепла через дно подставка уменьшает на 22 Вт. Оба приспособления вместе снизят отдаваемую мощность на 30 Вт; следовательно, эти 30 из 50 Вт будут идти на нагревание воды. На 1 градус при этих условиях вода нагреется за  $840/30$  с = 28 с. При решении задачи мы считали, что мощность потерь в диапазоне 59–60 градусов практически постоянна.

А.Простов

**Ф1707.** Вертикальный цилиндрический сосуд содержит две порции газа, отделенные друг от друга и от окружающего пространства двумя одинаковыми массивными поршнями массой  $M$  каждый (см. рисунок). В верхней части сосуда находится кислород, в нижней – гелий. Вначале объемы порций одинаковы и расстояние между поршнями составляет  $H$ . Нижнюю часть газа медленно нагревают. Какое количество теплоты нужно сообщить гелию в нижней части сосуда, чтобы увеличить его объем в два раза? Каким станет расстояние между поршнями через большой интервал времени – когда температуры порций газа снова сравняются? Теплоемкостью стенок и поршней пренебречь. Снаружи воздух откачан, теплоотдача в окружающее пространство пренебрежимо мала. Теплопроводность поршня, разделяющего порции газа, достаточно мала – за время нагрева тепло в верхнюю полость практически не поступает.



По условию задачи поршни массивные, и мы будем пренебрегать массой газа по сравнению с массой поршня (все равно масса газа в условии задачи не задана). При нагревании нижняя порция газа расширяется при неизменном давлении  $p = 2Mg/S$ , где  $S$  – площадь сечения сосуда. Начальные температуры порций газа одинаковы, давление внизу вдвое больше – получается, что в нижней части сосуда количество газа вдвое больше, чем в верхней. Количество теплоты, которое необходимо сообщить гелию, будет равно

$$\begin{aligned} Q &= \nu C_p (T_2 - T_1) = \nu \cdot 2,5R (T_2 - T_1) = \\ &= 2,5p(2V - V) = 2,5 \frac{2Mg}{S} SH = 5MgH. \end{aligned}$$

После выравнивания температур объемы порций газа снова сравниваются. Для нахождения нового расстояния  $h$  между поршнями воспользуемся законом сохранения энергии. Поскольку система теплоизолирована, ее полная энергия должна оставаться неизменной. После нагревания нижней порции газа суммарная потенциальная энергия поршней будет

$$Mg \cdot 2H + Mg \cdot 3H = 5MgH,$$

а полная энергия —

$$5MgH + 1,5vRT + 1,5 \cdot 2vR \cdot 2T = 5MgH + 1,5MgH + 1,5 \cdot 4MgH = 12,5MgH.$$

После выравнивания температур полная энергия составит

$$Mgh + 2Mgh + 1,5 \cdot 3vRT_1 = 7,5Mgh.$$

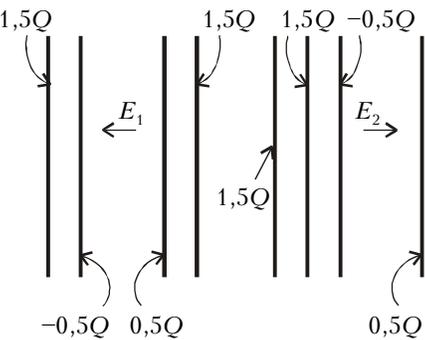
В соответствии с законом сохранения энергии найдем

$$h = \frac{5H}{3}.$$

З.Рафаилов

**Ф1708.** Плоский конденсатор емкостью  $C$  составлен из двух больших проводящих пластин, каждая из которых сделана двухслойной — из соединенных друг с другом листов тонкой фольги. Пластины несут одноименные заряды  $Q$  и  $2Q$ . Наружный слой фольги пластины с большим зарядом аккуратно отсоединяют, относят в сторону параллельно другим пластинам и приносят на другое место — третьим слоем снаружи к пластине с зарядом  $Q$ . При этом не допускают электрического контакта с этой пластиной — оставляют очень узкий зазор. Какую работу необходимо при этом совершить? Все действия мы производим издалека, стараясь не влиять на распределение зарядов пластин.

Поле снаружи от конденсатора при таком выборе зарядов пластин ненулевое (в отличие от случая равенства нулю полного заряда пластин конденсатора), однако при любой перестановке пластин меняется только поле внутри, а наружное поле не изменяется. На наружных сторонах



двух обкладок конденсатора (см. рисунок) собираются одинаковые по знаку и величине заряды — каждый из них равен половине полного заряда конденсатора (у «правильно» заряженного конденсатора эта полусумма равна нулю) — в нашем случае это  $1,5Q$ . На внутренних сторонах обкладок получаем заряды  $-0,5Q$  и  $0,5Q$ . Поле внутри определяется именно последними зарядами — поля наружных зарядов в этой области скомпенсированы. Энергию поля, сосредоточенного между пластинами, можно вычислить по обычной формуле:

$$W_1 = \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{Q^2}{8C}.$$

После отсоединения наружной части обкладки с зарядом  $2Q$  заряды внешней пластины на ней остались, и мы их перенесли на другую сторону. Теперь заряды пластин получившегося конденсатора равны  $2,5Q$  и  $0,5Q$ . Поле между обкладками изменило направление (для расчета энергии это не важно) и увеличилось в 2 раза. Энергия поля, сосредоточенного между пластинами, возросла при этом в 4 раза и составляет теперь

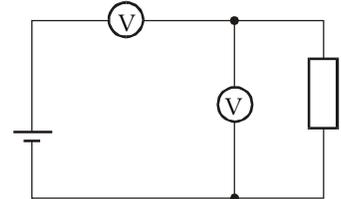
$$W_2 = \frac{Q^2}{2C}.$$

Поле снаружи не изменилось, следовательно, наша работа пошла на увеличение энергии поля между обкладками. Тогда необходимая для переноса работа равна

$$A = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{8C} = \frac{3Q^2}{8C}.$$

З.Рафаилов

**Ф1709.** Два одинаковых вольтметра соединены последовательно и подключены к батарейке (см. рисунок). Параллельно одному из вольтметров подключен резистор, при этом показания вольтметров составляют  $1,4$  В и  $3,1$  В. Отключим теперь один из вольтметров. Что будет показывать оставшийся прибор? Напряжение батарейки можно считать неизменным.



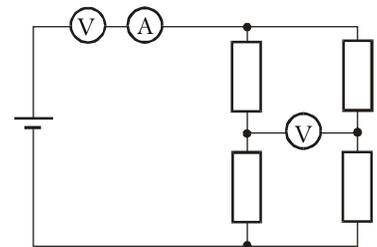
Если отключить верхний вольтметр, показания нижнего упадут до нуля.

Рассмотрим теперь второй случай — отключение правого вольтметра. Нам нужно найти отношение сопротивлений резистора и вольтметра (из условия ясно, что вольтметры вовсе не идеальные). Это легко сделать так: в исходной схеме один из вольтметров показывает  $3,1$  В, а другой — только  $1,4$  В. Это значит, что ток через верхний вольтметр больше тока нижнего в  $3,1/1,4$  раз, и разностный ток течет через резистор. Легко видеть, что отношение этого тока к току параллельно включенного вольтметра составит  $(3,1 - 1,4)/1,4 = 17/14$ . Ясно, что это отношение определяется обратным отношением сопротивлений, поэтому сопротивление вольтметра больше сопротивления резистора в  $17/14$  раз. Напряжение батарейки, равное  $(3,1 + 1,4)$  В =  $4,5$  В, можно считать неизменным — нагрузки высокоомные и влияние внутреннего сопротивления несущественно. Тогда напряжение вольтметра в оставшейся последовательной схеме составит

$$4,5 \frac{17}{14 + 17} \text{ В} \approx 2,47 \text{ В}.$$

Р.Схемов

**Ф1710.** В приведенной на рисунке схеме использованы одинаковые вольтметры. Сопротивления двух резисторов одинаковы и равны каждому по  $R$ , двух других — по  $3R$ . Показания приборов составляют  $2$  мА,  $3$  В и  $0,5$  В. Най-



дите по этим данным величину  $R$ .

Легко понять, что показание вольтметра, который включен в диагональ мостика, должно быть меньше – через него течет только часть полного тока. Ясно, что эта часть составляет  $0,5/3 = 1/6$ . Мостик не должен быть уравновешен – иначе вольтметр в диагонали показал бы ноль. Тогда можно решить задачу устно. Сумма токов через резисторы сопротивлением  $R$  и  $3R$  равна полному току 2 мА. Разность таких же токов равна одной шестой этого значения, т.е.  $1/3$  мА. Значит, токи эти равны  $7/6$  мА и  $5/6$  мА соответственно. Напряжение на резисторе сопротивлением  $3R$  равно произведению меньшего тока на это сопротивление, т.е.  $15R/6$  (В), напряжение на меньшем резисторе составляет  $7R/6$  (В). Разность этих напряжений равна 0,5 В. Тогда  $8R/6 = 0,5$ , откуда

$$R = 3/8 \text{ кОм} = 0,375 \text{ кОм} = 375 \text{ Ом}.$$

При решении мы использовали соображения симметрии – в этой схеме токи через одинаковые резисторы равны между собой.

*Р.Схемов*

**Ф1711.** Резистор сопротивлением 100 Ом подключен к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (идеальный диод имеет нулевое сопротивление при пропускании через него тока одной полярности и бесконечное сопротивление при попытке пропустить ток другой полярности). Найдите среднюю мощность, выделяющуюся в резисторе в виде тепла. Во сколько раз изменится эта мощность при подключении параллельно резистору конденсатора емкостью 1 мкФ? А при подключении конденсатора емкостью 1000 мкФ?

Легко подсчитать мощность без подключения конденсатора: диод «убирает» половину каждого периода, уменьшая мощность вдвое, т.е.

$$P = \frac{0,5U^2}{R} = \frac{0,5(220)^2}{100} \text{ Вт} = 242 \text{ Вт}$$

(220 В – это действующее, или эффективное значение напряжения).

Если параллельно резистору включить конденсатор очень большой емкости, то напряжение на резисторе перестанет быть переменным – оно постоянно будет равно амплитудному значению напряжения сети, и мощность возрастет ровно вчетверо (понятно, что конденсатор не дает лишней энергии – он просто помогает резистору эффективнее грабить источник). При очень малой емкости конденсатора мощность останется практически такой же, как и без него.

Теперь нужно понять – что же такое «очень большая» и «очень маленькая» емкости, что с чем тут нужно сравнивать. Проще всего сравнить период сетевого напряжения: при частоте 50 Гц он составляет 0,02 с и так называемое характерное время  $\tau$  для цепи конденсатор–резистор: оно определяется произведением  $RC$  и для конденсатора емкостью 1 мкФ составляет 0,0001 с, а для конденсатора емкостью 1000 мкФ – 0,1 с.

Все это очень мило и грамотно, но это все же не решение нашей задачи – полное решение должно включать разумную числовую оценку изменения мощности при подключении каждого конденсатора. Для конденсатора емкостью 1 мкФ нужно разобраться, в какой момент диод запира-

ется и конденсатор начинает снабжать накопленной энергией резистор. Если диод заперт, а напряжение конденсатора  $U$ , то ток равен  $I = U/R$  (пока напряжение конденсатора не успело заметно упасть), при этом скорость уменьшения напряжения конденсатора со временем равна

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{(\Delta Q/C)}{\Delta t} = \frac{U}{RC}$$

Если напряжение сети в этот момент спадает круче, то диод остается закрытым – чем дальше, тем круче спадает напряжение сети (пока не достигнет нуля), а конденсатор, наоборот, разряжается все медленнее (см. рисунок). В противном случае диод снова откроется, и конденсатор будет подключен к источнику (придется ждать уменьшения напряжения). Возьмем производную по времени от переменного напряжения сети (нам нужен спадающий участок) и приравняем полученному выше выражению для напряжения конденсатора (это тоже спадающая функция, производная ее отрицательна). Пусть напряжение в сети меняется по закону  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ , тогда получим

$$-U_0 \omega \sin \omega t = -\frac{U_0 \cos \omega t}{RC}$$

Для частоты 50 Гц имеем  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ . Получается, что диод запирается при напряжении, примерно равном  $U_1 = 9,8$  В, и накопленную энергию при запираии диода конденсатор 50 раз в секунду будет отдавать резистору, создавая добавочную мощность

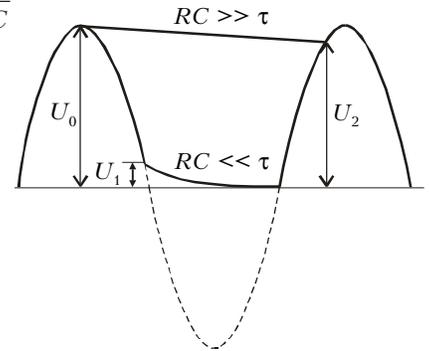
$$P_1 \approx f \frac{CU_1^2}{2} = 50 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100}{2} \text{ Вт} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}.$$

Но по сравнению со схемой без конденсатора мы несколько завысили оценку добавочной мощности – при запертом диоде в резистор не поступает мощность от сети, которая меньше мощности, отдаваемой конденсатором, но все же не равна нулю. Учет этой мощности снижает добавку еще примерно в три раза.

Для конденсатора большой емкости тоже нужно уточнить расчет – ведь напряжение его не остается равным амплитуде сети, а медленно спадает (до  $U_2$ ). Приблизительный учет этого уменьшения можно провести, считая ток разряда близким к постоянному. Аккуратный расчет показывает, что при подключении конденсатора емкостью 1000 мкФ мощность возрастает не в 4, а примерно в 3,5 раза. В общем, кроме разговоров о том, что какая-то величина очень-очень мала, должна быть и разумная оценка этой величины, пусть и грубая.

*А.Теплов*

**Ф1712.** Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления  $n = 1,5$  и имеет диаметр  $D = 5$  см. Радиус выпуклой сферической поверхности  $R = 5$  см. На плоскую поверхность линзы вдоль ее главной оптической оси падает широкий параллельный пучок



лучей. Определите размер пятна на экране, расположенном за линзой перпендикулярно падающему пучку. Положение экрана было выбрано по минимальному размеру светлого пятна при узком (ограниченном диафрагмой) пучке лучей вдоль главной оптической оси.

Линза в условии задачи расположена самым простым для расчета способом – параллельный пучок падает вначале перпендикулярно на плоскую поверхность линзы и не преломляется, поэтому считать преломление приходится только на сферической границе раздела стекло – воздух. Найдем толщину линзы  $d$  (в самом толстом месте):

$$R^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (R - d)^2,$$

откуда

$$d = 0,67 \text{ см.}$$

Толщина линзы для нас важна потому, что расстояния придется отсчитывать от разных точек поверхности линзы. Для тонкого (диафрагмированного) пучка, параллельного главной оптической оси линзы, изображение получится в фокусе на расстоянии

$$F = \frac{R}{n - 1} = 10 \text{ см.}$$

Рассмотрим самый удаленный от главной оптической оси луч (см. рисунок) – для него угол падения, измеренный относительно радиуса, проведенного в точку преломления на сферической поверхности, равен  $\alpha = 30^\circ$ ,

так как  $\sin \alpha = (D/2)/R = 0,5$ . Угол преломления находим по значению синуса:  $\sin \beta = n \sin \alpha = 0,75$ ,  $\beta = 48,6^\circ$ . После простых расчетов находим точку главной оптической оси, через которую этот луч пройдет. Она находится на расстоянии  $L = (D/2) \text{ctg}(\beta - \alpha)$  от плоской поверхности линзы. С учетом толщины линзы получим, что крайние лучи пучка после преломления пересекаются на расстоянии 3,2 см от экрана, что дает диаметр светлого пятна примерно 2,2 см. Интересно исследовать вопрос: а не найдутся ли лучи, которые дают больший диаметр пучка, чем полученный нами для крайних лучей?

