Очевидно, сумма цифр числа n равна s. Поскольку $10^{\max(a,b)}$ делится нацело на $2^a \cdot 5^b$ и $1 + 10^r + 10^{2r} + \ldots + 10^{(s-1)r} \equiv$ $\equiv s \equiv 0 \pmod{t}$, число n кратно s.

36. $2^{a+1} \cdot 5^{b-1}$

37. а) $\varphi(pq) = pq - q - p + 1 = (p-1)(q-1)$.

38. а) $x = 3$; б) $x = 3$, $y = 2$.

40. $\varphi(n)/2$.

41. а) Пусть простое число p входит в разложения чисел m и n на простые множители, соответственно, в s-й и t-й степенях. Для определенности пусть $s \le t$. Если $s > 0$, то число p входит в разложения на простые множители чисел НОК(m,n) и НОД(m,n) в t-й и s-й степенях. Значит, если $s > 0$, то благодаря числу p при подсчете значений функции Эйлера $\varphi(m)$, $\varphi(n)$, $\varphi(\text{НОК}(m,n))$ и $\varphi(\text{НОД}(m,n))$ возникнут, соответственно, множители $p^{s-1}(p-1)$, $p^{t-1}(p-1)$, $p^{t-1}(p-1)$ и $p^{s-1}(p-1)$. Если же $s = 0$, то p не входит в разложения на простые множители чисел m и НОД(m,n), а в разложения чисел n и НОК(m,n) оно входит в одной и той же степени.

в) Следует из пунктов а) и б).

г) Поскольку НОД$(m,n) > \varphi(\text{НОД}(m,n))$, из равенства предыдущего пункта следует, что $\varphi(m)\varphi(n) < \varphi(mn)$.

42. а) $x = 19, 38, 27$ или 54.

б) $x = 13, 26, 21, 42, 28$ или 36.

в) Так как при $x > 2$ число $\varphi(x)$ четно, то четным должно быть и само число x. Поскольку каждое второе натуральное число четно, $\varphi(x) \le x/2$. Следовательно, $12 = x - \varphi(x) \ge x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$, откуда $x \le 24$. *Ответ*: $x = 18$, 20 или 22.

г) *Ответ*: x – простое число. *Указание*. Если p – простое число, m – натуральное число, то $\varphi\left(p^{2m}\right) = p^{2m} - p^{2m-1} \le$ $\le p^{2m} - p^m$, причем неравенство обращается в равенство лишь при $m = 1$. Далее, для любых отличных от 1 натуральных чисел x и y докажите неравенство

$$\left(x^2 - x\right)\left(y^2 - y\right) < (xy)^2 - xy.$$

Теперь легко доказать, что $\varphi\left(x^2\right) < x^2 - x$ для любого составного числа x.

д) $x = 2^m$, где m – натуральное число.

е) Число x кратно 3. Поэтому его можно представить в виде $x = 3^m y$, где m – натуральное число, а y не кратно 3. Поскольку $\varphi\left(3^m y\right) = \varphi\left(3^m\right)\varphi(y) = 2 \cdot 3^{m-1}\varphi(y)$, то уравнение $\varphi(x) = x/3$ принимает вид $2\varphi(y) = y$. Последнему уравнению удовлетворяют, как мы знаем из предыдущего пункта этого упражнения, только степени двойки. *Ответ*: $x = 2^k \cdot 3^m$, где k, m – натуральные числа.

ж) *Указание*. Если бы в разложении числа x на простые множители содержалось более одного нечетного простого числа, то степень двойки в левой части равенства была бы выше, чем в правой. Если $x = 2^k p^m$, где k, m – натуральные числа, p – нечетное простое число, то $\varphi(x) = 2^{k-1}(p-1)p^{m-1}$, и уравнение $\varphi(x) = x/n$ можно записать в виде $p - 1 = 2p/n$. *Ответ*: решений нет.

з) В силу пункта в) предыдущего упражнения, $\varphi(nx) \ge \varphi(n)\varphi(x)$. Следовательно, $\varphi(n) \le 1$, т.е. $n = 2$. При $n = 2$ в качестве x можно взять любое нечетное число.

43. в) Задачу удобно решать с конца, т.е. искать кратчайший способ получения нуля из произвольного числа n с помощью двух операций – вычитания единицы и деления пополам. Пусть $f(n)$ – число операций в таком кратчайшем способе. Если $n = 2k + 1$ – нечетное число, то делить его пополам нельзя, так что $f(2k + 1) = 1 + f(2k)$. Докажем индукцией по k, что $f(2k) = 1 + f(k)$. Для $k = 1$ это ясно. Пусть утверждение доказано для всех $k < K$. Если из числа $2K$ сначала вычесть единицу, то для получения нуля потребуется как минимум $1 + f(2K - 1) = 2 + f(2K - 2) = 3 + f(K - 1)$ операций. Если же сначала разделить $2K$ пополам, то потребуется лишь $1 + f(K) \le 2 + f(K - 1)$ операций. Теперь индукцией по m легко доказать, что $f(n) = m + a_m + a_{m-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

а), б) В частности, $f(100) = f\left(1100100_2\right) = 6 + 1 + 1 + 0 +$ $+ 0 + 1 + 0 + 0 = 9$ и $f(9907) = f\left(10011010110011_2\right) = 13 + 1 +$ $+ 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 21$.

44. б) The magic words are squeamish ossifrage.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Поскольку оба тела движутся с одинаковыми ускорениями, расстояние между ними будет оставаться неизменным.

2. Вес человека, полностью погруженного в воду, пропорционален ускорению свободного падения и разности плотностей его тела и воды. Если вода на Земле и на Луне одна и та же, то легче плавать на Луне, где ускорение свободного падения примерно в 6 раз меньше, чем на Земле.

3. Да.

4. По закону всемирного тяготения по мере удаления от Земли сила притяжения уменьшается от mg до нуля. Поэтому вес тела убывает от $2mg$ у поверхности Земли до mg на бесконечности.

5. Нет.

6. Космонавтам приходится спать вниз головой, чтобы обеспечить привычный за время полета приток в нее крови, как в невесомости.

7. Да, поскольку невесомость не сказывается на тепловом расширении жидкости.

8. Нет.

9. Это связано с вращением Земли вокруг собственной оси.

10. У крупных массивных тел сила тяжести преобладает над силой упругости и «топит» любую выступающую часть планеты. На астероидах и ядрах комет сила тяжести ничтожна, их форма определяется процессами соударения, слипания и разрушения, поэтому может быть весьма разнообразной.

11. Из-за сплюснутости Земного шара у полюсов длина пути по меридиану будет меньше, чем по экватору; поэтому второй путешественник вернется раньше.

12. Со скоростью, при которой линейная скорость на экваторе сравняется с первой космической скоростью.

13. Обратимся к объяснению Ричарда Фейнмана: «... притяжение Луной суши и воды уравновешено в центре < Земли – *А.Л.* >. Но притяжение Луной тех масс воды, которые находятся на «лунной» стороне Земли, сильнее, чем среднее притяжение всей Земли, а притяжение масс воды на обратной стороне Земли слабее среднего. Кроме того, вода в отличие от суши может течь. Истинная причина приливов определяется этими двумя факторами».

14. На приливное действие Луны накладывается приливное действие Солнца.

15. В те далекие времена (около двух миллиардов лет назад) затмения были не только более продолжительными, но и значительно более частыми – ведь лунная тень покрывала значительно большую площадь Земли, чем сейчас.

16. Из-за неоднородности поля тяготения Солнца даже на сферически симметричной планете, не вращающейся вокруг своей оси, ускорения свободного падения в разных точках поверхности планеты оказались бы неодинаковыми.

Микроопыт

Нет. На вас со стороны воды действует выталкивающая сила, равная силе тяжести; значит, с вашей стороны на воду действует ваш вес.

Две задачи Архимеда

1. Пусть $AB = 2R$, $AC = 2r$, тогда площадь арбелона $S =$ $= \pi\left(R^2 - r^2 - (R-r)^2\right)/2 = \pi r(R - r)$. Из равенства $CD^2 =$