высоты, поэтому площадь треугольника APN в k раз больше площади треугольника NQD. Треугольники NRD и NQD имеют общую сторону ND и одну из сторон, лежащую на общей прямой DR, поэтому площадь треугольника NRD также в k раз больше площади треугольника NQD. Отсюда следует равенство треугольников APN и NRD.

5. Обозначим искомые числа $\frac{x}{y}$ и z, где x, y, z – целые, $y \neq 0$. По условию $\frac{x}{y} + z = \frac{x}{y} \cdot z$, откуда $x + yz = xz$, $z = \frac{x}{x-y}$. Одно из возможных решений получим, если положим $y = x - 1$.

Итак, пусть $x \neq 1$ – любое целое число. Условию задачи, например, удовлетворяют пары чисел $\frac{x}{x-1}$, x.

Малая теорема Ферма

1. $a^3 + 5a = \left(a^3 - a\right) + 6a$.
2. $x \equiv 71 \pmod{101}$.
3. $x \equiv 0 \pmod 6$.
6. а) В произведении четырех последовательных целых чисел обязательно есть множитель, кратный 4. Кроме него, есть еще один четный множитель.
в) $a^5 - 5a^3 + 4a = a\left(a^2 - 1\right)\left(a^2 - 4\right) = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$.
8. *Указание*. Если числа m, n не кратны 5, то $\left(m^4 - 1\right) - \left(n^4 - 1\right)$ кратно 5 вследствие малой теоремы Ферма.
9. $k^4 - 1 = (k-1)(k+1)\left(k^2+1\right)$. Все сомножители четны; при этом одно из чисел $k - 1$ и $k + 1$ кратно 4. Делимость $k^2 - 1$ на 3 и делимость $k^4 - 1$ на 5 следуют из малой теоремы Ферма.
10. а) *Первый способ*. Поскольку $2222 = 7 \cdot 317 + 3$ и $5555 = 7 \cdot 793 + 4$, имеем: $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} = 3^{6\cdot 925+5} + 4^{6\cdot 370+2} = \left(3^6\right)^{925} \cdot 3^5 + \left(4^6\right)^{370} \cdot 4^2 \equiv 1^{925} \cdot 243 + 1^{370} \cdot 16 = 259 = 7 \cdot 37 \equiv 0 \pmod 7$.
Второй способ. Число $\left(2222^5\right)^{1111} + \left(5555^2\right)^{1111}$ кратно числу $2222^5 + 5555^2 \equiv 3^5 + 4^2 \equiv 0 \pmod 7$.
11. $11^{10} - 1 = (11-1)\left(11^9 + 11^8 + \ldots + 11 + 1\right)$.
12. а) $a = 10k \pm 3$, где k – целое число.
13. $(-1)^n - (-1) = 2$.
14. *Указание*. Поскольку число $2^n - 2$ является одним из значений многочлена $a^n - a$, наибольший общий делитель чисел вида $a^n - a$ не превосходит $2^n - 2$ (и является делителем числа $2^n - 2$). Для любого целого числа a существует хотя бы одно число в пределах от 1 до $2^n - 2$, сравнимое с a по модулю $2^n - 2$.
15. Да, существует.
18. *Ответ*: 15. *Решение*. $3^{2000} = 3^{47\cdot 42+26} = \left(3^{47}\right)^{42} \cdot 3^{26} \equiv 3^{26} = 9^{13} = 9 \cdot 9^{12} = 9 \cdot 81^6 \equiv 9 \cdot (-5)^6 = 9 \cdot 125^2 \equiv 9 \cdot (-4)^2 = 9 \cdot 16 = 144 \equiv 15 \pmod{43}$.
19. $a^{16} - 1 = \left(a^8 - 1\right)\left(a^8 + 1\right)$.
20. $56786730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$.
21. $5^{p^2} + 1 = \left(5^p\right)^p + 1 \equiv 5^p + 1 \equiv 5 + 1 = 6 \pmod p$. *Ответ*: $p = 2$ или 3.
24. Обозначим первую цифру буквой a, а число, получаемое из исходного шестизначного числа вычеркиванием первой цифры, обозначим буквой b. Исходное число равно $100000a + b$, а число, полученное из него перестановкой цифр, равно $10b + a$. Осталось заметить, что

$$(100000a + b) \cdot 10 = 10^6 a + 10b = \left(10^6 - 1\right)a + 10b + a \equiv 10b + a \pmod 7.$$

25. $\underbrace{11\ldots1}_{p-1} = \underbrace{99\ldots9}_{p-1}\Big/9 = \left(10^{p-1} - 1\right)\Big/9$. Число $10^{p-1} - 1$ кратно p по малой теореме Ферма.
26. При $p = 3$ воспользуйтесь признаком делимости на 3. При $p = 2$ или 5 утверждение следует из того, что рассматриваемое число оканчивается той же самой цифрой, что и число 123456789.
Пусть $p \neq 2$, 3, 5. Докажем, что разность

$$\underbrace{aa\ldots a}_{p}\underbrace{00\ldots0}_{(9-a)p} - a\underbrace{00\ldots0}_{9-a},$$

где $1 \le a \le 9$, кратна p. В силу предыдущего упражнения, число $\underbrace{aa\ldots a}_{p-1}$ кратно p. Поэтому достаточно заметить, что число

$$a\underbrace{00\ldots0}_{(9-a)p} - a\underbrace{00\ldots0}_{9-a} = a \cdot 10^{(9-a)p} - a \cdot 10^{9-a} = a\left(\left(10^{9-a}\right)^p - 10^{9-a}\right)$$

кратно p по малой теореме Ферма.
28. а) Поскольку $\varphi(9) = 6$, для любого не кратного 3 числа k, по теореме Эйлера, $k^6 - 1$ кратно 9. Далее, $k^6 - 1 = \left(k^3 - 1\right)\left(k^3 + 1\right)$, причем числа $k^3 - 1$ и $k^3 + 1$ отличаются на 2 и потому не могут одновременно быть кратны 3.
29. а) В силу предыдущего упражнения, куб не кратного трем числа сравним с 1 или −1 по модулю 9. Сумма трех чисел, каждое из которых равно 1 или −1, не может быть кратна 9.
30. *Указание*. Поскольку $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, последняя цифра числа 7^k определяется остатком от деления числа k на 4. Далее,

$$7^{2m+1} = (8-1)^{2m+1} \equiv (-1)^{2m+1} = -1 \pmod 4.$$

31. Применим теорему Эйлера:

$$7^{400} \equiv 1 \pmod{1000}.$$

Следовательно,

$$7^{10000} = \left(7^{400}\right)^{25} \equiv 1^{25} = 1 \pmod{1000}.$$

Поскольку произведение $7 \cdot 7^{9999} = 7^{10000}$ оканчивается цифрами 001, то последняя цифра числа 7^{9999} равна 3. Значит, из разряда единиц в разряд десятков при умножении 7^{9999} на 7 переносится 2. Поэтому предпоследняя цифра числа 7^{9999} равна 4, и из разряда десятков в разряд сотен переносится 3. Теперь ясно, что в разряде сотен числа 7^{9999} находится цифра 1. *Ответ*: 7^{9999} оканчивается на 143.
33. Поскольку $\varphi(n) \le n$, число $n!$ кратно $\varphi(n)$. Поэтому $2^{n!} - 1$ кратно числу $2^{\varphi(n)} - 1$, которое кратно n по теореме Эйлера.
34. Если n – нечетное число, то можно сгруппировать первое слагаемое с последним, второе с предпоследним и так далее:

$$\left(1^n + (n-1)^n\right) + \left(2^n + (n-2)^n\right) + \ldots + \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^n + \left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right).$$

Поскольку $k^n + (n-k)^n \equiv k^n + (-k)^n = 0 \pmod n$, при нечетном n рассматриваемая сумма кратна n.
Если же n четно, пусть 2^s – наивысшая степень двойки, на которую n делится нацело. Тогда для любого четного числа k, очевидно, $k^n \equiv 0 \pmod{2^s}$; а для любого нечетного числа k, по теореме Эйлера, $k^n = \left(k^{n/2^{s-1}}\right)^{2^{s-1}} \equiv 1 \pmod{2^s}$. Следовательно, $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n \equiv \frac{n}{2} \not\equiv 0 \pmod{2^s}$. А если сумма не кратна 2^s, то она тем более не кратна числу n.
35. Пусть $s = 2^a \cdot 5^b \cdot t$, где a, b – целые неотрицательные числа, t – натуральное число, не кратное ни 2, ни 5. Существует такое натуральное число r, что $10^r \equiv 1 \pmod t$. Пусть $n = 10^{\max(a,b)} \cdot \left(1 + 10^r + 10^{2r} + \ldots + 10^{(s-1)r}\right)$.