По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{А}},$$

или

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{А}1} + \vec{F}_{\text{А}2}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$0 = -\rho_{\text{ш}} Vg - T\cos\alpha + \rho_{\text{в}} Vg,$$

а проектируя силы и ускорение в горизонтальной плоскости на радиальное направление, получаем

$$\rho_{\text{ш}} V\omega^2 (r - l\sin\alpha) =$$

$$= \rho_{\text{в}} V\omega^2 (r - l\sin\alpha) - T\sin\alpha.$$

Исключая T из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{r - l\sin\alpha}} \approx 11\ \text{с}^{-1}.$$

* * *

Умение описывать движение по окружности может существенно помочь при анализе движений по еще более сложным траекториям: винтовой линии или циклоиде. Действительно, движение по винтовой линии можно представить в виде суперпозиции движения по окружности и движения по прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через точку окружности. Движение по циклоиде тоже возможно представить как одновременные два движения: по окружности и по прямой, лежащей в плоскости окружности.

Задача 3. *По длинной проволочной винтовой линии с шагом H, ось которой вертикальна, скользит бусинка. Радиус воображаемой цилиндрической поверхности, на которой расположена винтовая линия, равен R. Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке* μ *(*$\mu < H/(2\pi R)$*). Найдите установившуюся скорость* v_* *скольжения бусинки. Ускорение свободного падения g.*

На бусинку действуют силы тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. При этом $F_{\text{тр}} = \mu N$, как обычно, а $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, где $\vec{N}_1$ – горизонтальная составляющая, направленная к оси винтовой линии, а $\vec{N}_2$ лежит в одной вертикальной плоскости с $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис.3).

Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости будет расти величина силы трения, так что

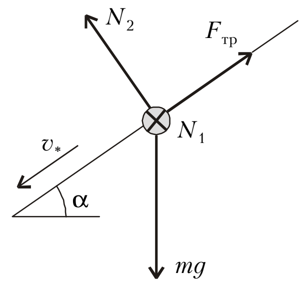

Рис. 3

естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью v_*. Для определения этой скорости перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся по вертикали вниз со скоростью $v_*\sin\alpha$, где α – угол наклона вектора скорости к горизонту и $\mathrm{tg}\,\alpha = H/(2\pi R)$. В выбранной системе бусинка равномерно движется по окружности радиусом R со скоростью $v_*\cos\alpha$, при этом ускорение бусинки направлено к оси винтовой линии и по величине равно $(v_*\cos\alpha)^2/R$. Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление, находим

$$m\frac{(v_*\cos\alpha)^2}{R} = N_1.$$

В вертикальной плоскости справедливо равенство

$$0 = m\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

откуда, переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, получим

$$F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha,\ N_2 = mg\cos\alpha.$$

Из этих соотношений с учетом того, что $F_{\text{тр}} = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$, окончательно имеем

$$v_* = (gR/\mu)^{1/2}\left((\mathrm{tg}^2\alpha - \mu^2)(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)\right)^{1/4}$$

Задача 4*. *Протон движется в однородном и постоянном магнитном поле с индукцией* $\vec{B}$. *Векторы начальной скорости* $\vec{v}_0$ *и индукции* $\vec{B}$ *образуют угол* α. *Определите вид траектории протона в лабораторной системе отсчета. Масса протона m, заряд e.*

В соответствии со вторым законом Ньютона и выражением для магнитной составляющей силы Лоренца имеем

$$m\vec{a} = e[\vec{v}, \vec{B}],$$

где $[\vec{v}, \vec{B}]$ – векторное произведение.[1] Проанализируем это уравнение. Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости $\vec{v}$; следовательно, эта сила не совершает работы, и по теореме об изменении кинетической энергии величина v скорости протона остается постоянной и равной своему начальному значению v_0. Сила Лоренца перпендикулярна также вектору индукции $\vec{B}$; следовательно, составляющая $\vec{v}_\parallel$ вектора скорости, параллельная вектору индукции, тоже остается постоянной и равной своему начальному значению $v_0\cos\alpha$. Тогда величина $v_\perp$ перпендикулярной вектору индукции составляющей скорости протона тоже остается постоянной и равной своему начальному значению $v_0\sin\alpha$.

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории со скоростью $\vec{V} = \vec{v}_\parallel$. С учетом закона сложения скоростей и представления скорости в виде суммы составляющих:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$$

получаем, что в рассматриваемой системе протон движется в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, с постоянной по величине (но не по направлению!) скоростью $\vec{v}\,' = \vec{v}_\perp$. Уравнение движения принимает вид

$$m\vec{a}\,' = e[\vec{v}_\perp, \vec{B}].$$

Отсюда следует, что величина вектора ускорения равна

$$a' = \frac{ev_\perp B}{m} = \frac{eBv_0\sin\alpha}{m}$$

и постоянна, а его направление перпендикулярно вектору скорости $\vec{v}_\perp$. Значит, в рассматриваемой системе отсчета протон равномерно движется по окружности радиусом

$$R = \frac{v_\perp^2}{a'} = \frac{mv_0\sin\alpha}{eB}$$

с частотой

$$\omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{eB}{m},$$

не зависящей от скорости.

Соответственно, движение протона относительно лабораторной системы отсчета осуществляется по винтовой

[1] *При решении этой и следующей задач используется понятие векторного произведения, которое известно учащимся специализированных классов физико-математического профиля. (Прим. ред.)*