Движение по окружности

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

Систематизируя задачи о движении по окружности, обычно рассматривают два типа задач: о равномерном и неравномерном движениях.

Равномерное движение по окружности

Криволинейное движение всегда характеризуется не равным нулю ускорением. Когда говорят о равномерном движении по окружности, имеют в виду постоянство величины (модуля) скорости и изменение ее направления. Ускорение в таком случае перпендикулярно вектору скорости и направлено по радиусу к центру окружности. Учет этого обстоятельства существенно облегчает решение задач, так как в соответствии со вторым законом Ньютона точно известно направление суммы всех сил, действующих на тело. Векторное уравнение, отвечающее второму закону Ньютона, часто бывает удобнее заменить скалярными уравнениями, куда входят проекции соответствующих векторов на координатные оси. При этом одну ось обычно направляют по радиусу к центру окружности, а другую (если не все силы лежат в плоскости окружности) – перпендикулярно плоскости окружности.

Задача 1. *Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной l, массой m и жесткостью k, вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью ω. Найдите радиус R вращающегося кольца.*

Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной ΔL и массой $\Delta m = m\Delta L/(2\pi R)$. На выделенный участок действуют силы упругости $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (рис.1), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю: $T_1 = T_2 = T$. По второму закону Ньютона,

$$\Delta m\,\vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 .$$

Рассматриваемый участок равномерно движется по окружности; следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно $\omega^2 R$. Это ускорение сообщается суммой сил $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$, приложенных к участку.

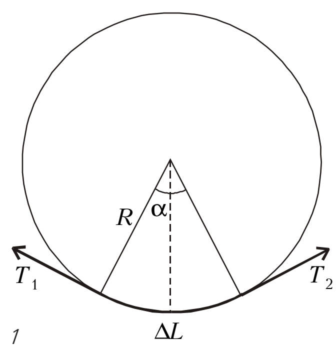

Рис. 1

Запишем второй закон Ньютона в проекциях сил и ускорений на радиальное направление:

$$\frac{m\Delta L}{2\pi R}\,\omega^2 R = 2T\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Величина T упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением $(2\pi R - l)$ кольца законом Гука:

$$T = k(2\pi R - l).$$

При малых углах $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta L/(2R)$. С учетом этих соотношений уравнение движения принимает вид

$$\frac{m}{2\pi}\,\omega^2\Delta L = 2k(2\pi R - l)\frac{\Delta L}{2R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{2\pi k l}{4\pi^2 k - \omega^2 m}.$$

Из полученного выражения следует, что при $\omega = 2\pi\sqrt{k/m}$ кольцо должно неограниченно растягиваться. Однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а при некоторой скорости вращения кольцо просто разорвется.

Задача 2. *Маленький деревянный шарик прикреплен с помощью нерастяжимой нити длиной l = 30 см к дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити r = 20 см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения ω нить отклонится от вертикали на угол α = 30°? Ускорение свободного падения g = 10 м/с².*

Нить с шариком отклонится к оси вращения (рис.2). На шарик будут действовать три силы: сила тяжести

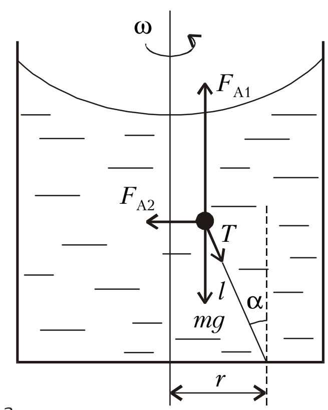

Рис. 2

$m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила Архимеда $\vec{F}_A$. Найдем последнюю силу. Обозначим объем шарика V, плотность дерева, из которого изготовлен шарик, $\rho_ш$, плотность воды $\rho_в$. Рассмотрим сначала движение жидкости до погружения в нее шарика. Любой элементарный объем воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления, т.е. силы Архимеда, уравновешивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объеме, а горизонтальная составляющая силы Архимеда сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости в элементарном объеме соответствующим фрагментом шарика эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая $\vec{F}_{A1}$ силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна $\rho_в V g$, а направленная к оси вращения горизонтальная составляющая $\vec{F}_{A2}$ силы Архимеда по величине равна $\rho_в V\omega^2(r - l\sin\alpha)$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиусом $r - l\sin\alpha$ в горизонтальной плоскости.