Ясно, что точки базисной окружности ω при инверсии остаются неподвижными; точки, расположенные внутри базисной окружности, переходят в точки, лежащие вне ω, и наоборот; прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя (заметим, что эта прямая перпендикулярна ω). Эти свойства позволяют назвать инверсию *симметрией относительно базисной окружности.* Для полного обоснования такого названия покажем, что осевая симметрия является предельным случаем инверсии при $R \to \infty$. В самом деле, обозначим расстояния $MB = d$ и $BM' = d'$ (см. рис.5); так как $(R-d)(R+d') = R^2$, то $d' = d/(1-d/R)$. Если теперь оставить точку B на месте, а центр O по лучу BO устремить в бесконечность, то окружность ω перейдет в прямую, перпендикулярную отрезку MM', и будет выполняться равенство $d' = d$.

Инверсия, как и осевая симметрия, часто используется при решении геометрических задач. В основном к ней обращаются, когда в условии фигурируют касающиеся окружности и прямые. Но прежде чем применять инверсию, познакомимся с некоторыми ее свойствами.

1. *Окружность γ, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, перпендикулярную линии центров данной окружности и базисной.*

Пусть O_1 – центр окружности γ, проходящей через центр O инверсии. Линия центров OO_1 пересекает γ в точке A (рис.6), A' – точка, инверсная A. Покажем, что γ переходит в прямую l, пересекающую луч OO' в точке A' под прямым углом. Возьмем произвольную точку B на γ и построим инверсную ей точку B'. Достаточно убедиться, что угол $OA'B'$ прямой. Так как $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = R^2$, то $OA : OB = OB' : OA'$, следовательно, треугольники OBA и $OA'B'$ подобны, откуда $\angle OA'B' = \angle OBA$, а последний из них прямой (как вписанный, опирающийся на диаметр). Свойство доказано.

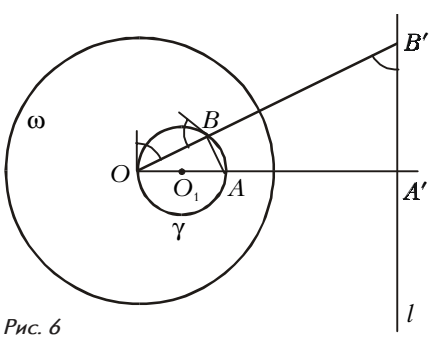

Рис. 6

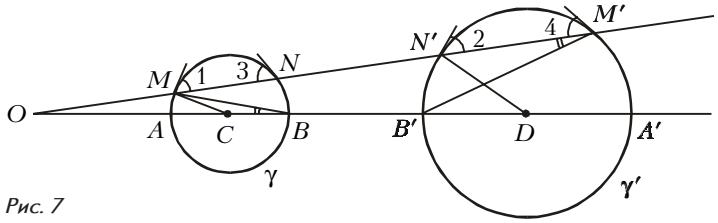

Рис. 7

Очевидно, верно и обратное утверждение: *прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии.*

2. *Окружность γ, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность γ', также не проходящую через точку O; причем окружности γ и γ' гомотетичны с центром гомотетии O.*

Пусть O – центр базисной, а C – центр данной окружности γ (на рисунке 7 базисная окружность не изображена). Линия центров пересекает окружность γ в точках A и B. Инверсные им точки обозначим через A' и B'. Так как $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$, то $OA' : OB = OB' : OA = k$. Зададим гомотетию с центром O и коэффициентом k. При этой гомотетии окружность γ с диаметром AB перейдет в окружность γ' с диаметром $B'A'$. Покажем, что γ' – окружность, инверсная γ (при этом их центры C и D не переходят друг в друга при инверсии). Возьмем на γ произвольную точку M и проведем луч OM. Пусть он второй раз пересекает окружность γ в точке N, а окружность γ' – в точках N' и M'; здесь точка N' гомотетична точке M, а M' – точке N. Так как $CM \parallel DN'$, то центральные углы OCM и ODN' равны, и следовательно, $\angle OBM = \angle OM'B'$. Поэтому треугольники OBM и $OM'B'$ подобны, откуда $OM' : OB' = OB : OM$, или $OM \cdot OM' = OB \cdot OB' = R^2$. Таким образом, при инверсии произвольная точка M окружности γ переходит в единственную точку M' окружности γ'. Свойство доказано.

3. *При инверсии сохраняются углы между линиями.*

Напомним, что под углом между двумя линиями в точке их пересечения понимается угол между касательными к ним в этой точке. Мы докажем свойство 3 применительно к прямым и окружностям.

Сначала покажем, что прямая, проходящая через центр инверсии, пересекает данную окружность и инверсную ей прямую или окружность под одинаковыми углами. В первом случае обратимся к рисунку 6 и проведем в точках O и B касательные к окружности γ. Утверждение следует из равенства отмеченных на рисунке углов. Во втором случае (см. рис.7) проведем касательные к γ в точках M и N, а к γ' в точках N' и M'. Из гомотетии окружностей получаем $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, но $\angle 1 = \angle 3$, что и доказывает наше утверждение.

Пусть теперь M – точка пересечения двух линий β и γ (каждая из них может быть окружностью или прямой); при инверсии они перейдут в линии β' и γ', пересекающиеся в точке M'. Проведем через точки M и M' прямую l, она пройдет через центр инверсии. Углы, образованные линиями β и β' с прямой l, равны между собой; аналогично равны между собой углы, образованные γ и γ' с прямой l. Отсюда и следует свойство 3.

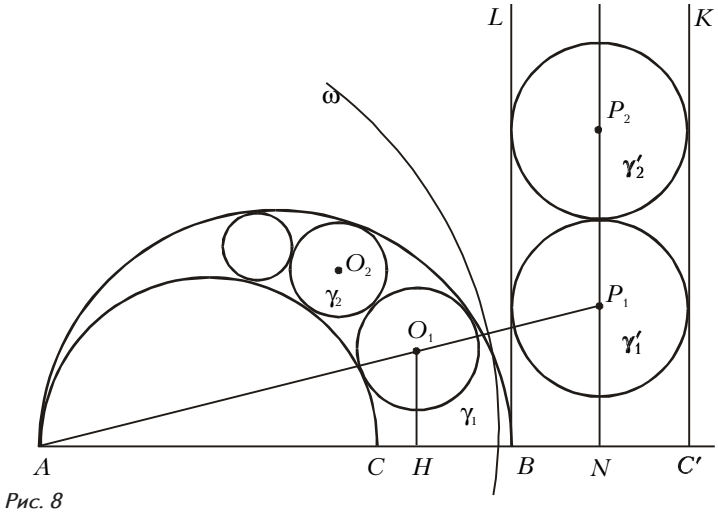

Рис. 8