Две задачи Архимеда

Л.ШИБАСОВ

В ТРАКТАТЕ «МАТЕМАТИКА» ДРЕВнегреческого ученого Паппа, живжившего в III веке, содержатся две задачи, решенные, как предполагают, Архимедом. Приведем эти задачи в формулировке Паппа, заменив только обозначения: вместо греческих букв будем использовать более привычные нам латинские.

Задача 1. «*Возьмем три касающиеся друг друга полуокружности ADB, AEC, CFB и в заключенную между их окружностями фигуру, которую называют арбелон*[1], *впишем несколько кругов, касающихся друг друга и основных полукругов (рис.1); пусть центры этих кругов будут* O_1, O_2, O_3, O_4. *Требуется показать, что опущенный из центра* O_1 *на AB перпендикуляр будет равен диаметру круга, описанного около* O_1, *далее, что перпендикуляр, опущенный из* O_2, *будет вдвое больше диаметра круга около* O_2, *а перпендикуляр из* O_3 *втрое больше соответствующего диаметра, и вообще последовательные перпендикуляры будут кратными соответствующих диаметров в прогрессии натурального ряда чисел, причем вписывание кругов может продолжаться до бесконечности.*»

Таким образом, в задаче утверждается, что отношения длин перпендикуляров, опущенных из центров окружностей, вписанных в арбелон, к диаметрам этих окружностей образуют последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, …

Задача 2. «*Пусть ADB и AEC будут полукруги (рис.2), опишем касательные к их окружностям круги с центрами* O_1, O_2, O_3, *а также следующие за ними вплоть до точки A. Теперь то, что опущенный из* O_1 *на AB перпендикуляр будет равен радиусу круга* O_1, *является очевидным; еще я утверждаю, что перпендикуляр, опущенный из* O_2, *будет втрое больше радиуса круга* O_2, *опущенный из* O_3 – *в пять раз больше радиуса круга* O_3, *и все следующие перпендикуляры будут больше соответствующих радиусов в кратностях последовательных нечетных чисел.*»

По мнению ученых, авторство Архимеда в решении этих задач наиболее вероятно, поскольку Папп в процессе доказательства ссылается на результаты Архимеда. К тому же Архимед решал и другие задачи, связанные с арбелоном, например следующие.

Упражнения

1. Покажите, что площадь арбелона равна площади круга, построенного на перпендикуляре *CD* как на диаметре (рис.3).

2. Докажите, что круги, вписанные в арбелон по обе стороны от перпендикуляра *CD* (рис.4), равны.

Правда, древнегреческий текст этих задач не дошел до наших дней, но сохранился его перевод на арабский язык. Переводчик, арабский математик Сабит ибн Курра (IX в.), приписывает их Архимеду.

Античные ученые решали геометрические задачи, сравнивая рассматриваемые отрезки и устанавливая отношения между ними. С этой целью им часто приходилось выстраивать длинные цепи пропорций – решения получались довольно громоздкими.

Оказывается, можно получить совсем короткое решение задач Архимеда и даже более общего утверждения, если обратиться к интересному преобразованию плоскости – инверсии. Древнегреческие математики воспользоваться им не могли, так как понятие инверсии появилось в математике лишь в 30-е годы прошлого столетия. И хотя на страницах «Кванта» уже рассказывалось об этом преобразовании, целесообразно вновь напомнить о нем новому поколению читателей.

Рассмотрим на плоскости окружность ω радиуса R с центром в некоторой точке O. *Инверсией* (от лат. inversio – переворачивание, обращение) называют такое преобразование плоскости, при котором любой точке M, отличной от O, ставится в соответствие точка M' такая, что M' лежит на луче OM и $OM \cdot OM' = R^2$. Точка O называется *центром инверсии*, R – *радиусом инверсии*, ω – *базисной окружностью.* Построение точки, инверсной данной, ясно из определения (рис.5): если точка M лежит внутри окружности ω, то восставляют в этой точке перпендикуляр к лучу OM до пересечения его в точке A с окружностью ω, а затем проводят касательную к ω в точке A; эта касательная пересекает луч OM в искомой точке M'. Для точек, расположенных вне ω, построение проводится в обратном порядке. Приведенный способ построения может быть принят за геометрическое определение инверсии.

[1] *Скребок, секира, сапожный нож.*

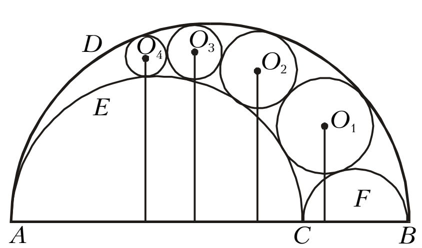

Рис. 1

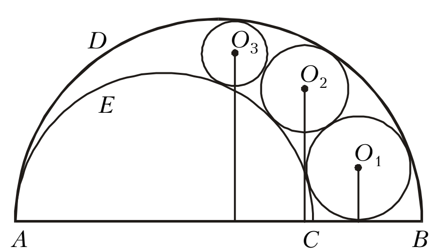

Рис. 2

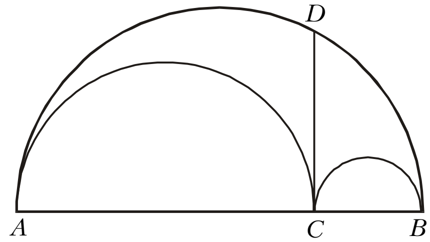

Рис. 3

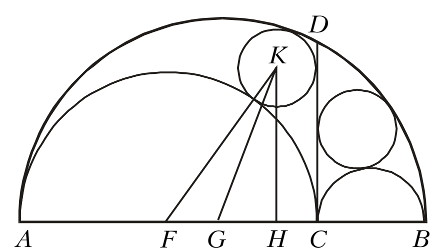

Рис. 4

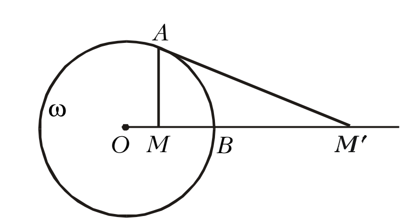

Рис. 5