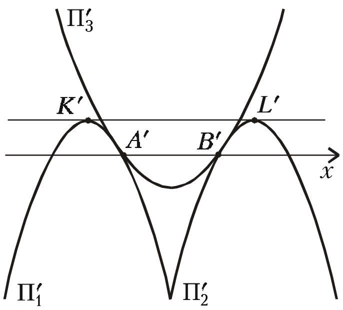



Тогда получим новые параболы $\Pi_1'$, $\Pi_2'$, $\Pi_3'$ (см. рисунок), при этом $\Pi_1'$ и $\Pi_2'$ по-прежнему будут касаться параболы $\Pi_3'$, так как у этих пар парабол по-прежнему будет ровно по одной общей точке $A'$ и $B'$.

Точки $A'$ и $B'$ лежат на оси $Ox$, поэтому рисунок симметричен относительно серединного перпендикуляра к отрезку $A'B'$. Из этого следует, что $K'L' \| A'B'$ и, значит, $KL \| AB$.

*Р.Карасев*

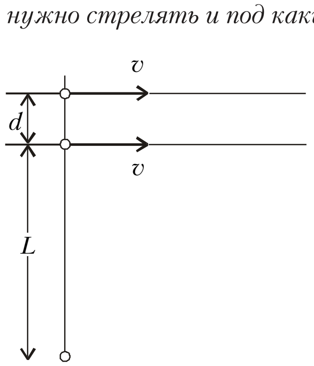
**М1695.** *Грани правильного октаэдра раскрасили в шахматном порядке. Докажите, что для любой внутренней точки сумма расстояний до плоскостей черных граней равна сумме расстояний до плоскостей белых граней.*

Плоскости, которым принадлежат грани каждого цвета, образуют равные правильные тетраэдры. Утверждение задачи следует из того, что сумма расстояний от внутренней точки правильного тетраэдра до его граней постоянна и равна утроенному объему тетраэдра, деленному на площадь грани. (Чтобы доказать это, соединим точку с вершинами правильного тетраэдра и рассмотрим объемы образовавшихся частей, основаниями которых являются грани исходного тетраэдра.)

Наметим другое доказательство. Каждую грань октаэдра будем считать основанием тетраэдра с вершиной в данной внутренней точке. Нужно доказать, что сумма объемов четырех «черных» тетраэдров равна сумме объемов четырех «белых». Для читателя, знакомого с принципом Кавальери, это следует из того, что всякое сечение октаэдра, перпендикулярное его диагонали, по равной площади пересекается с «черными» и «белыми» тетраэдрами.

*Д.Терешин, В.Произволов*

**Ф1703.** *В компьютерной игре все движется в одной плоскости. Меткий стрелок должен поразить двух злодеев одной пулей. Злодеи двигаются с одинаковыми постоянными скоростями v параллельно друг другу, находясь на расстоянии d один от другого, как показано на рисунке. Соединяющая их прямая перпендикулярна направлению скорости v. В данный момент стрелок находится на продолжении этой прямой – на расстоянии L от ближнего злодея. Пуля после выстрела летит по прямой со скоростью 3v. Пронзая злодея, пуля не меняет ни направления движения, ни величины своей скорости. В какой момент нужно стрелять и под каким углом к направлению движения злодеев нужно выпустить пулю? На сколько дольше ближнего проживет дальний злодей?*




Поразив первого злодея, пуля продолжает лететь вдоль той же прямой. Обозначим время, которое пуля летит от одного злодея до другого, через $t$. Тогда получится прямоугольный треугольник с катетами $d$ и $vt$ и гипотенузой $3vt$. Отсюда сразу находим и время $t$, и угол $\alpha$ между направлением полета пули и направлением движения злодеев:

$$t = \frac{d}{2\sqrt{2}\,v}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

Элементарные рассуждения показывают, что стрелять нужно как раз в «данный момент».

*Я.Злодеев*

**Ф1704.** *По прямому горизонтальному стержню может скользить без трения бусинка массой M (рис.1). К бусинке привязана легкая нерастяжимая нитка длиной L. Нитку мы тянем за свободный конец так, что скорость этого конца все время направлена вдоль нити и равна по величине $v_0$. С какой силой нужно тянуть в тот момент, когда нить направлена под углом $\alpha$ к стержню? Нить все время находится в горизонтальной плоскости.*

Если бы скорость свободного конца нити была постоянной (а это не так – вектор скорости все время поворачивается), можно было бы «пересесть» в систему отсчета, которая связана с этим концом, – в такой системе бусинка движется по окружности и можно легко записать необходимые уравнения. В нашем же случае система получилась бы неинерциальной, и никакого упрощения мы не получили бы. Будем действовать так. Нить нерастяжима – это позволит связать скорости концов нити при заданном значении угла $\alpha$. Дальше зададим очень малый интервал времени $\Delta t$, найдем новое положение бусинки и новое значение угла. После этого выразим новую скорость и найдем ее приращение за выбранный интервал $\Delta t$. Таким образом мы вычислим ускорение бусинки, после чего силу уже будет совсем просто найти. Итак, пусть для угла $\alpha$ скорость бусинки равна $u$ (рис.2), причем

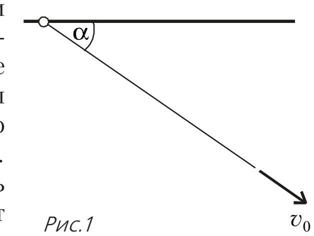



Рис.1

$$u\cos\alpha = v_0.$$

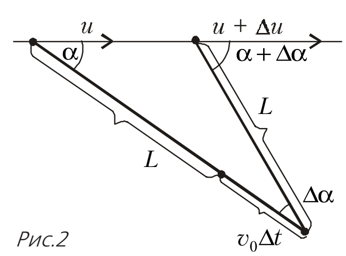



Рис.2

Через малый интервал $\Delta t$ конец нити сместится на $v_0\Delta t$, бусинка проедет $u\Delta t$, и теперь можно записать новое равенство

$$(u + \Delta u)\cos(\alpha + \Delta\alpha) = v_0.$$

Раскрывая скобки, пользуясь известным выражением для косинуса суммы углов и заменяя конус малого угла на 1, а синус на значение угла, получим

$$\Delta u \cos\alpha = u \sin\alpha \cdot \Delta\alpha.$$

Величину приращения угла можно найти из геометрических соображений – например, используя теорему синусов

$$\frac{u\Delta t}{\sin\Delta\alpha} = \frac{L}{\sin\alpha}.$$

Заменяя синус малого угла $\Delta\alpha$ значением самого угла, найдем

$$\Delta\alpha = \frac{u\Delta t \sin\alpha}{L}.$$