

**M1717\*.** Две окружности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , содержащиеся внутри окружности  $\Gamma$ , касаются  $\Gamma$  в различных точках  $M$  и  $N$  соответственно. Окружность  $\Gamma_1$  проходит через центр окружности  $\Gamma_2$ . Прямая, проходящая через две точки пересечения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , пересекает  $\Gamma$  в точках  $A$  и  $B$ . Прямые  $MA$  и  $NB$  пересекают  $\Gamma_1$  в точках  $C$  и  $D$  соответственно. Докажите, что  $CD$  касается  $\Gamma_2$ .

*П. Кожевников*

**M1718\*.** Найдите все функции  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  такие, что

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

для всех  $x, y \in \mathbf{R}$ .

*(Япония)*

**M1719.** Последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  задана своим первым членом  $a_1 = 1$  и рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

а) Докажите, что  $a_{100} > 14$ .

б\*) Найдите  $[a_{1000}]$ , т.е. укажите такое целое число  $m$ , для которого  $m \leq a_{1000} < m + 1$ .

в) Докажите существование и найдите значение предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \sqrt{n}.$$

*А. Спивак*

**M1720\*.**  $N$  одинаковых деревянных кубиков склеены между собой так, что каждые два из них склеены по грани или по участку грани. Докажите, что максимальное значение  $N$  равно шести.

*В. Произволов*

**F1718.** Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью 5 м/с. В некоторый момент его замечает лиса и начинает погоню. Скорость лисы постоянна по величине и равна 4 м/с, а движется она тоже не самым лучшим образом – скорость ее в каждый момент направлена точно в ту точку, где находится заяц. Вначале расстояние между ними уменьшается, затем начинает возрастать. Минимальное расстояние составляет 30 м. Какое ускорение было у лисы в тот момент, когда расстояние стало минимальным?

*М. Учителев*

**F1719.** В системе, показанной на рисунке 1, силы трения отсутствуют. При каком значении силы  $F$  клин и тележка

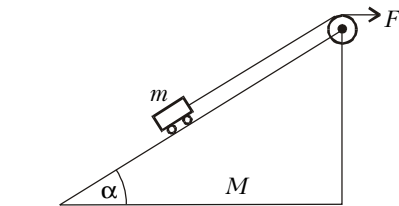


Рис.1

могут двигаться вместе, без проскальзывания? Угол при основании клина  $\alpha$ .

*А. Клинов*

**F1720.** Кусок мела лежит на горизонтальной доске с коэффициентом трения  $\mu$ . Доску резко начинают двигать в горизонтальном направлении со скоростью  $v_0$ , а через

время  $\tau$  резко останавливают. Найдите длину меловой черты на доске.

*К. Чертов*

**F1721.** В высокий вертикальный сосуд квадратного сечения, разделенный вертикальными перегородками на три части (рис.2), налили до одной и той же высоты горячий суп с температурой  $+65^\circ\text{C}$  – в большое отделение, теплый компот при  $+35^\circ\text{C}$  и холодный квас при  $+20^\circ\text{C}$ . Наружные стенки сосуда очень хорошо теплоизолированы, внутренние перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, не очень хорошо проводящего тепло. Через некоторое время суп остыл на 1 градус. Считая, что все эти жидкости – практически одна вода, определите, на сколько изменились за это время температуры остальных двух жидкостей. Кваса в сосуде столько же, сколько компота, супа – вдвое больше.

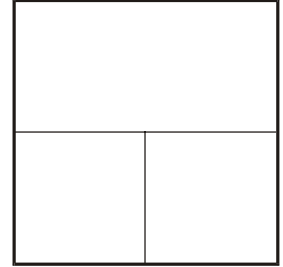


Рис.2

*А. Компотов*

**F1722.** В закрытом сосуде кроме воздуха содержится некоторое количество воды. Температура внутри сосуда поддерживается равной  $+100^\circ\text{C}$ . Начальный объем сосуда 10 л, жидкость при этом занимает очень небольшую часть объема сосуда, а давление составляет ровно 2 атм. При увеличении объема сосуда до 20 л давление в нем упало до 1,4 атм. Считая эти значения точными, найдите массу воздуха в сосуде. А сколько молекул воды содержится в сосуде?

*З. Рафаилов*

**F1723.** Высокий вертикальный сосуд содержит небольшое количество гелия под поршнем массой  $M$ , на который поставлена гиря массой  $49M$ . В состоянии равновесия поршень «висит» над дном сосуда на высоте  $h$ . Гирию снимают с поршня, и он начинает движение вверх. Оцените максимальную высоту подъема поршня. На какой высоте над дном сосуда поршень в конце концов остановится? Считайте при расчете, что трения в системе нет, стенки и поршень совершенно не проводят тепло, а теплоемкость стенок и поршня сосуда очень мала.

*А. Повторов*

**F1724.** Конденсаторы, емкости которых  $C$ ,  $2C$  и  $3C$ , соединены друг с другом, как показано на рисунке 3. Конденсатор емкостью  $2C$  заряжен до напряжения  $U_0$ , остальные два не заряжены. К свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резисторы сопро-

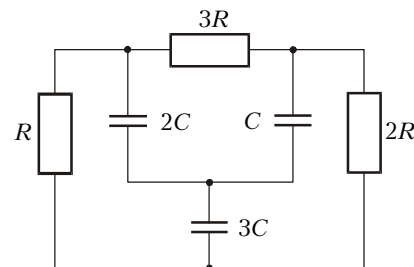


Рис.3