

M1717*. Две окружности Γ_1 и Γ_2 , содержащиеся внутри окружности Γ , касаются Γ в различных точках M и N соответственно. Окружность Γ_1 проходит через центр окружности Γ_2 . Прямая, проходящая через две точки пересечения Γ_1 и Γ_2 , пересекает Γ в точках A и B . Прямые MA и NB пересекают Γ_1 в точках C и D соответственно. Докажите, что CD касается Γ_2 .

П. Кожевников

M1718*. Найдите все функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такие, что

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

для всех $x, y \in \mathbf{R}$.

(Япония)

M1719. Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots задана своим первым членом $a_1 = 1$ и рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

а) Докажите, что $a_{100} > 14$.

б*) Найдите $[a_{1000}]$, т.е. укажите такое целое число m , для которого $m \leq a_{1000} < m + 1$.

в) Докажите существование и найдите значение предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \sqrt{n}.$$

А. Спивак

M1720*. N одинаковых деревянных кубиков склеены между собой так, что каждые два из них склеены по грани или по участку грани. Докажите, что максимальное значение N равно шести.

В. Произволов

F1718. Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью 5 м/с. В некоторый момент его замечает лиса и начинает погоню. Скорость лисы постоянна по величине и равна 4 м/с, а движется она тоже не самым лучшим образом – скорость ее в каждый момент направлена точно в ту точку, где находится заяц. Вначале расстояние между ними уменьшается, затем начинает возрастать. Минимальное расстояние составляет 30 м. Какое ускорение было у лисы в тот момент, когда расстояние стало минимальным?

М. Учителев

F1719. В системе, показанной на рисунке 1, силы трения отсутствуют. При каком значении силы F клин и тележка

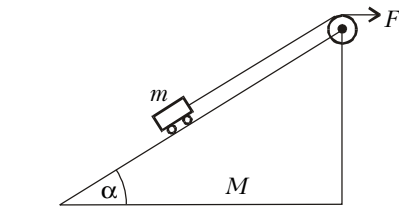


Рис.1

могут двигаться вместе, без проскальзывания? Угол при основании клина α .

А. Клинов

F1720. Кусок мела лежит на горизонтальной доске с коэффициентом трения μ . Доску резко начинают двигать в горизонтальном направлении со скоростью v_0 , а через

время τ резко останавливают. Найдите длину меловой черты на доске.

К. Чертов

F1721. В высокий вертикальный сосуд квадратного сечения, разделенный вертикальными перегородками на три части (рис.2), налили до одной и той же высоты горячий суп с температурой $+65^\circ\text{C}$ – в большое отделение, теплый компот при $+35^\circ\text{C}$ и холодный квас при $+20^\circ\text{C}$. Наружные стенки сосуда очень хорошо теплоизолированы, внутренние перегородки имеют одинаковую толщину и сделаны из одного материала, не очень хорошо проводящего тепло. Через некоторое время суп остыл на 1 градус. Считая, что все эти жидкости – практически одна вода, определите, на сколько изменились за это время температуры остальных двух жидкостей. Кваса в сосуде столько же, сколько компота, супа – вдвое больше.

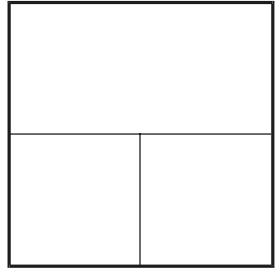


Рис.2

А. Компотов

F1722. В закрытом сосуде кроме воздуха содержится некоторое количество воды. Температура внутри сосуда поддерживается равной $+100^\circ\text{C}$. Начальный объем сосуда 10 л, жидкость при этом занимает очень небольшую часть объема сосуда, а давление составляет ровно 2 атм. При увеличении объема сосуда до 20 л давление в нем упало до 1,4 атм. Считая эти значения точными, найдите массу воздуха в сосуде. А сколько молекул воды содержится в сосуде?

З. Рафаилов

F1723. Высокий вертикальный сосуд содержит небольшое количество гелия под поршнем массой M , на который поставлена гиря массой $49M$. В состоянии равновесия поршень «висит» над дном сосуда на высоте h . Гирию снимают с поршня, и он начинает движение вверх. Оцените максимальную высоту подъема поршня. На какой высоте над дном сосуда поршень в конце концов остановится? Считайте при расчете, что трения в системе нет, стенки и поршень совершенно не проводят тепло, а теплоемкость стенок и поршня сосуда очень мала.

А. Повторов

F1724. Конденсаторы, емкости которых C , $2C$ и $3C$, соединены друг с другом, как показано на рисунке 3. Конденсатор емкостью $2C$ заряжен до напряжения U_0 , остальные два не заряжены. К свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резисторы сопро-

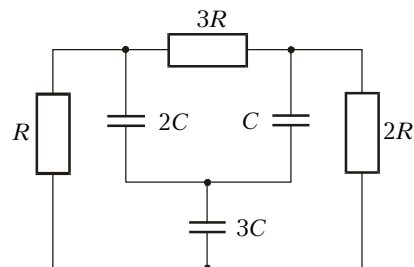


Рис.3