

Решения задач М1681—М1690, Ф1698—Ф1702

М1681. Квадрат целого числа оканчивается на ...21. Может ли третья цифра справа быть четной?

Ответ: не может.

Число y , возводимое в квадрат, оканчивается на 1 или на 9.

Пусть $y = 10a + 1$. Так как $2a$ оканчивается на 2, то последней цифрой a будет 1 или 6.

Пусть $y = 10a + 9$. Так как $8(a + 1)$ оканчивается на 2, то $a + 1$ — на 4 или на 9. Итак, последней цифрой a будет 3 или 8. Но

$$11^2 = 121, \quad 61^2 = 3721,$$

$$39^2 = 1521, \quad 89^2 = 7921.$$

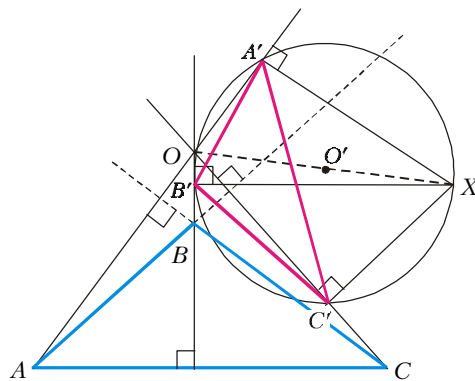
Значит, третья цифра справа всегда нечетна.

Наметим другое решение. Если третья цифра четна, то $y^2 \equiv 5 \pmod{8}$ — противоречие: квадрат нечетного числа при делении на 8 дает остаток 1.

В. Сендеров

М1682. Из какой-либо точки плоскости опускаются перпендикуляры на высоты треугольника (или на их продолжения). Докажите, что основания перпендикуляров являются вершинами треугольника, подобного исходному.

Для исходного треугольника ABC основания названных перпендикуляров, опущенных из точки X , — точки A' , B' и C' , а точка O — точка пересечения его высот (см. рисунок).



Заметим, что углы $C'XB'$ и BAC , а также $A'XB'$ и ACB равны. Соединим точки X и O . Очевидно, что точки A' , B' и C' лежат на одной окружности с центром в середине XO (эти точки являются вершинами прямых углов, опирающихся на XO). Поэтому угол $C'XB'$ равен углу $C'A'B'$, а угол $A'XB'$ равен углу $A'C'B'$, следовательно, треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

Р. Кудинов

М1683. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

Ясно, что пустых коробок нет. Если имеется коробка, в которой находится только одна бусинка, то эта бусинка в

любом случае должна быть выбрана. Уберем эту коробку с бусинкой, а также вторую бусинку того же цвета (из другой коробки). Останутся 18 бусинок, разложенные в 9 коробок. Количество способов выбрать по бусинке из каждой коробки осталось при этом тем же, что и в исходной задаче. Будем продолжать действовать так до тех пор, пока имеются коробки, содержащие всего одну бусинку. Пустых коробок при этом появиться не может, так как это привело бы к противоречию с условием задачи: в этом случае не существовало бы ни одного способа требуемого выбора.

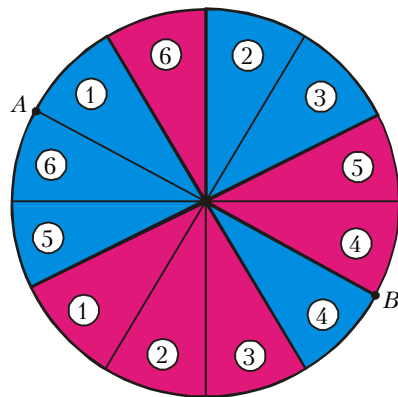
В результате останется $2n$ бусинок, разложенных в n коробок, по две в каждой. Будем выстраивать коробки в «цепочку» так, чтобы соседними были коробки, содержащие бусинки одного цвета (аналогично правилам игры в домино). Это можно делать до тех пор, пока цепочка не «замкнется», т.е. на концах не будут находиться коробки, содержащие бусинки одного цвета.

Все коробки при этом разобьются на несколько цепочек (в частности, если коробка содержит две бусинки одного цвета, то цепочка состоит из нее одной). Ясно, что выбрав одну из двух бусинок в любой из коробок, мы однозначно определяем выбор бусинок из других коробок той же цепочки и никак не ограничиваем выбор бусинок из коробок других цепочек. Поэтому общее количество способов требуемого выбора равно 2^k , где k – количество получившихся цепочек.

А.Гришин, В.Бугаенко

M1684*. Круг разделен радиусами на $2n$ равных секторов, из которых какие-то n – синие, а остальные n – красные. В синие сектора, начиная с некоторого, по ходу часовой стрелки последовательно вписаны все натуральные числа от 1 до n . В красные сектора, начиная с некоторого, против хода часовой стрелки тоже последовательно вписаны все числа от 1 до n . Докажите, что найдется полукруг, в сектора которого вписаны все числа от 1 до n .

Нужно доказать, что найдется диаметр AB , разделяющий сразу все пары одинаковых чисел (см. рисунок; здесь $n = 6$). Условимся называть красными числа, стоящие в красных секторах, и синими – стоящие в синих секторах. Расстоянием между двумя числами a и b назовем количество чисел, расположенных на меньшей дуге между числами a и b . Числа, расставленные по окружности, разбиваются на пары равных. Выберем ту пару равных чисел, расстояние между которыми наименьшее (если таких пар несколько, выберем любую из них). Пусть, для определенности, выбранная пара – красная единица и синяя единица, причем меньшая дуга ω между ними идет от красной единицы к синей против часовой стрелки. На дуге ω либо нет чисел (т.е. две единицы стоят рядом), либо все числа одного цвета, иначе красное и синее



из них). Пусть, для определенности, выбранная пара – красная единица и синяя единица, причем меньшая дуга ω между ними идет от красной единицы к синей против часовой стрелки. На дуге ω либо нет чисел (т.е. две единицы стоят рядом), либо все числа одного цвета, иначе красное и синее

числа n были бы на расстоянии меньшем, чем расстояние между единицами. Пусть все числа на этой дуге (если они есть) – синие (случай, когда они красные, аналогичен). Проведем диаметр, отделяющий синюю единицу от числа, следующего за ним по часовой стрелке; покажем, что этот диаметр искомым. Действительно, рассмотрим полукруг, содержащий синюю единицу. Прочтем синие числа, записанные в этом полукруге, начиная с единицы, против часовой стрелки – это числа $1, 2, \dots, l$ (l – некоторое число). Прочтем теперь красные числа. Поскольку на дуге ω нет красных чисел, это будут числа $n, n-1, \dots, n-m$ (m – некоторое число). Так как всего в полукруге n чисел, то в нем записаны все числа от 1 до n по одному разу.

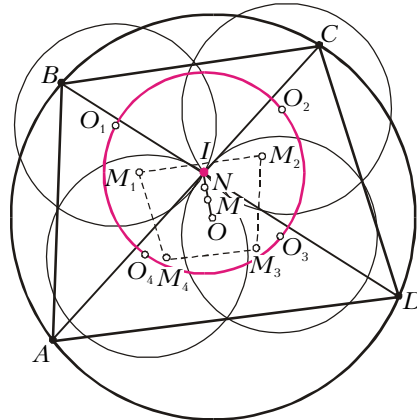
Мы разобрали ситуацию такую, когда пара разноцветных чисел с наименьшим расстоянием представлена единицами. Если таковые числа не единицы, то можно устроить циклическую перенумерацию так, чтобы они стали единицами.

В.Произволов

M1685. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что окружности, проведенные через середины сторон треугольников ABC, BCD, CDA, DAB , имеют общую точку, а их центры лежат на одной окружности.

Рассматриваемые в задаче окружности называются окружностями Эйлера, или окружностями девяти точек, так как они проходят через девять замечательных точек: середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой пересечения его высот.

Обозначим центры окружностей Эйлера треугольников ABC, BCD, CDA, DAB соответственно O_1, O_2, O_3, O_4 , точки пересечения медиан этих треугольников – M_1, M_2, M_3, M_4 , центр окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, обозначим O (см. рисунок).



Так как окружности Эйлера проходят через середины сторон соответствующих треугольников, то они гомотетичны описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности с коэффициентом гомотетии $\frac{1}{2}$ и центрами гомотетии соответственно в точках M_1, M_2, M_3, M_4 . Но тогда O_1, O_2, O_3, O_4 можно рассматривать как точки, гомотетичные соответственно точкам M_1, M_2, M_3, M_4 , с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии

$K_1 = \frac{3}{2}$, т.е. четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ гомотетичен четырехугольнику $M_1M_2M_3M_4$.

Теперь докажем, что четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ гомотетичен исходному четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом гомотетии $K_2 = -\frac{1}{3}$.

Поместим в вершинах четырехугольника $ABCD$ равные точечные массы. Центр масс системы A, B, C находится в точке M_1 , поэтому центр масс системы A, B, C, D лежит на отрезке DM_1 и делит этот отрезок в отношении 3:1 (считая от точки D). Иными словами, точка M_1 гомотетична точке D с центром гомотетии, совпадающим с центром масс системы A, B, C, D , и коэффициентом гомотетии $K_2 = -\frac{1}{3}$.

Такое же заключение можно сделать и в отношении остальных вершин четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$. Следовательно, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом гомотетии

$K = K_1 \cdot K_2 = -\frac{1}{2}$, поэтому около четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ можно описать окружность. Пусть I – центр этой окружности. Ее радиус равен половине радиуса окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$,

так как $K = -\frac{1}{2}$. Но таковы же радиусы всех четырех окружностей Эйлера, т.е. их центры лежат на окружности того же радиуса, поэтому все окружности Эйлера проходят через точку I .

Нетрудно доказать, что центр масс системы A, B, C, D (или, что то же самое, точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, и отрезка, соединяющего середины его диагоналей) находится на середине отрезка OI .

Пусть M – указанный центр масс, N – центр окружности, описанной около четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$. По доказанному выше, точка N гомотетична точке O с центром гомотетии в точке M и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{3}$. Это утверждение можно записать иначе: точка N гомотетична точке M с центром гомотетии в точке O и

коэффициентом гомотетии $\frac{4}{3}$.

В то же время, точка I гомотетична точке N с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии $\frac{3}{2}$.

Следовательно, точка I гомотетична точке M с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$.

Так как точка N делит отрезок OI в отношении 2:1 (считая от точки O), то точка N – центр гомотетии, переводящей четырехугольник $ABCD$ в четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$.

И.Вайнштейн

M1686. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$ и удовлетворяют равенствам

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1$$

и

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} dx = \sqrt{2}.$$

Докажите, что $f(x) = g(x)$ на отрезке $[0; 1]$.

Для любой пары неотрицательных чисел a и b справедливо элементарное неравенство $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. При этом неравенство обращается в равенство лишь тогда, когда $a = b$. Ввиду этого и условий задачи, можно записать цепочку неравенств

$$2 \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|) dx \leq \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} dx = 2.$$

Отсюда следует, что функции $f(x)$ и $g(x)$ равны и неотрицательны на отрезке $[0; 1]$.

Подобным образом читатель может доказать аналогичное утверждение для трех (и более) функций: если $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$ и

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 1,$$

а

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x) + \varphi^2(x)} dx = \sqrt{3},$$

то

$$f(x) = g(x) = \varphi(x) \text{ на } [0, 1].$$

В.Произволов

M1687. Будем называть размером прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений – длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместится больший по размеру прямоугольный параллелепипед?

Ответ: не может.

Пусть мы имеем прямоугольный параллелепипед P' , лежащий внутри прямоугольного параллелепипеда P . Оценим двумя способами сумму l длин проекций трех взаимно перпендикулярных ребер параллелепипеда P' на три прямые, параллельные ребрам параллелепипеда P . С одной стороны, сумма проекций трех взаимно перпендикулярных ребер параллелепипеда P' на любое ребро параллелепипеда P не превосходит длины этого ребра. Действительно, проекция внутреннего параллелепипеда на любое ребро внешнего есть отрезок, концы которого – это проекции двух противоположных вершин. От одной из них до другой можно пройти по трем взаимно перпендикулярным ребрам. Поэтому рассматриваемая проекция равна сумме проекций этих трех ребер; она, очевидно, не больше, чем длина ребра, на которое мы проецируем. Значит, l не превосходит размера параллелепипеда P . С другой стороны, длина любого отрезка не превосходит суммы его проекций на три взаимно перпендикулярных направления. Поэтому размер параллелепипеда P' не больше l .

Тем самым, размер внутреннего параллелепипеда не больше размера внешнего.

А.Шень, В.Бугаенко

M1688*. Дана функция $f(x) = (x^2 + ax + b)/(x^2 + cx + d)$, где трехчлены $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ не имеют общих корней. Докажите, что два утверждения равносильны: 1) найдется числовой интервал, свободный от значений $f(x)$;

2) $f(x)$ представима в виде $f(x) = f_1(f_2(\dots f_{n-1}(f_n(x)\dots)))$, где каждая из функций $f_i(x)$ есть функция одного из видов: $k_i x + m_i$, x^{-1} , x^2 .

Поскольку квадрат функции принимает только неотрицательные значения, появляется интервал, свободный от значений функции.

С другой стороны, если есть интервал, свободный от значений функции f , тогда есть и интервалы, свободные от значений f^{-1} , $kf + m$. Поэтому, если f – суперпозиция функций вида x^2 , x^{-1} и $kx + m$, то найдется интервал, свободный от значений f .

Теперь покажем, что если есть интервал, свободный от значений f , то f можно представить в виде искомой композиции. Для начала сведем задачу к случаю, когда множество значений f ограничено. В самом деле, пусть f не принимает значений из интервала $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, тогда функция

$$\left(f(x) - \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right)^{-1} < 2\varepsilon^{-1}$$

ограничена.

Теперь рассмотрим пространство квадратных трехчленов $x^2 + px + q$, где каждый квадратный трехчлен задается парой параметров (p, q) .

Рассмотрим дискриминантную параболу $p^2 = 4q$. Для таких трехчленов $D = 0$ и $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2} \right)^2$. Область внутри параболы отвечает множеству трехчленов с отрицательным дискриминантом, область вне – с положительным.

Если дробь $\frac{x^2 + p_1x + q_1}{x^2 + p_2x + q_2}$ несократима и определена при всех x , то знаменатель $x^2 + p_2x + q_2$ не обращается в ноль и, стало быть, имеет отрицательный дискриминант (это означает, что соответствующая точка в пространстве трехчленов лежит внутри дискриминантной параболы). Теперь решение задачи вытекает из того факта, что прямая не может содержаться целиком внутри параболы, и следующих вспомогательных утверждений.

1. Пусть $X_1(p_1, q_1)$ и $X_2(p_2, q_2)$ – точки в пространстве параметров и пусть точки $X_3(p_3, q_3)$ и $X_4(p_4, q_4)$ лежат на прямой X_1X_2 , тогда

$$\frac{x^2 + p_3x + q_3}{x^2 + p_4x + q_4} = \frac{\alpha\varphi + \beta}{\gamma\varphi + \delta},$$

где $\varphi = \frac{x^2 + p_1x + q_1}{x^2 + p_2x + q_2}$.

Доказательство. Поскольку точки X_3 и X_4 лежат на прямой X_1X_2 , найдутся такие μ, ν , что

$$p_3 = \mu p_1 + (1 - \mu)p_2, \quad q_3 = \mu q_1 + (1 - \mu)q_2, \\ p_4 = \nu p_1 + (1 - \nu)p_2, \quad q_4 = \nu q_1 + (1 - \nu)q_2.$$

Тогда

$$\frac{x^2 + p_3x + q_3}{x^2 + p_4x + q_4} = \frac{\mu(x^2 + p_1x + q_1) + (1 - \mu)(x^2 + p_2x + q_2)}{\nu(x^2 + p_1x + q_1) + (1 - \nu)(x^2 + p_2x + q_2)} = \frac{\mu\varphi + (1 - \mu)}{\nu\varphi + (1 - \nu)},$$

что и требовалось.

2. Дробно-линейную функцию $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ можно представить в виде композиции функций вида $kx + m$ и x^{-1} .

Доказательство. Можно считать, что $\gamma \neq 0$. Вычитая константу из дроби, сводим задачу к случаю, когда $\alpha = 0$. Обращая такую дробь, приходим к линейной функции.

А.Белов, Г.Челноков

M1689. Арифметическая прогрессия из натуральных чисел содержит не менее трех членов, их произведение – делитель некоторого числа $n^2 + 1$.

а) Докажите, что существует такая прогрессия с разностью 12.

б) Докажите, что такой прогрессии с разностью 10 или 11 не существует.

в)* Какое наибольшее число членов может содержать такая прогрессия с разностью 12?

а) Рассмотрим числа 1, 13, 25; для них $5^2 + 1 = 13 \cdot 2$, $7^2 + 1 = 25 \cdot 2$. Число $57^2 + 1$ делится на $13 \cdot 25$: к этому легко придти непосредственно, а общий метод см. ниже.

б) Из трех чисел $a, a + 10, a + 20$ одно делится на 3, а $n^2 + 1$ на 3 не делится.

Случай разности 11 рассматривается аналогично.

в) Ни один из членов прогрессии не делится на 7, ибо на 7 не делится $n^2 + 1$. Значит, из семи членов прогрессии (если бы такая была) можно было бы выбрать два, разность которых делится на 7. Получили противоречие: $k \cdot 12$ кратно 7 (пишут: $k \cdot 12 : 7$), где $0 < k < 7$.

Докажем, что прогрессия из шести членов есть:

$$(5, 17, 29, 41, 53, 65).$$

Нам нужно доказать существование такого числа n , что $n^2 + 1$ делится на

$$5 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 65 = (25) \cdot 17 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 13. \quad (*)$$

Каждое из шести чисел в правой части (*) обладает нужным свойством:

$$(7 + 25x)^2 + 1 : 25, \quad (4 + 17y)^2 + 1 : 17, \\ (12 + 29z)^2 + 1 : 29, \quad (9 + 41u)^2 + 1 : 41, \\ (23 + 53v)^2 + 1 : 53 \text{ (так как } 23^2 + 1 = 530), \\ (5 + 13w)^2 + 1 : 13.$$

Теперь нам понадобится предложение, известное как «китайская теорема об остатках».

Теорема. Пусть a_1, \dots, a_m – натуральные числа, каждые два из которых взаимно просты, r_1, \dots, r_m – произвольные целые числа. Тогда существуют целые числа x_1, \dots, x_m такие, что

$$a_1x_1 + r_1 = \dots = a_mx_m + r_m.$$

При $m = 2$ теорема доказывается с помощью алгоритма Евклида, после чего ее утверждение распространяется на общий случай $m > 2$ по индукции.

Об этом важном предложении элементарной теории чисел и его применениях уже не раз рассказывалось на страницах нашего журнала (см., например, статью Д.Флейшмана «Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова» в №3 за 1997 год).

Для окончания решения пункта в) достаточно применить теорему к системе уравнений $7 + 25x = 4 + 17y = \dots = 23 + 53z = 5 + 13w$.

Дополнение. Существуют ли более длинные арифметические прогрессии, удовлетворяющие всем условиям нашей задачи? На этот вопрос нетрудно ответить с помощью результатов статьи «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» (см. «Квант» №3 за 1999 год). Именно, легко показать, что разность любой прогрессии задачи обязана делиться на 12. С другой стороны, выше мы показали, что разность любой такой прогрессии, содержащей не менее семи членов, должна делиться на 7.

Прогрессия задачи с разностью $12 \cdot 7 = 84$ существует: с помощью статьи «Суммы квадратов...» и китайской теоремы об остатках легко показать, что делителем некоторого числа $n^2 + 1$ является произведение всех членов прогрессии (29, 113, 197, 281, 365, 449, 533, 617, 701, 785).

Эта прогрессия содержит 10 членов; 11 же членов прогрессии задачи с разностью 84 содержать не может: 84 не делится на простое число $p = 4k + 3 = 11$.

В.Сендеров

M1690. В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три ребра. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Известно, что любая синяя грань является многоугольником, около которого можно описать окружность. Докажите, что и красная грань является многоугольником, около которого можно описать окружность.

Каждой вершине многогранника припишем сферу, которая проходит через нее и через три вершины, соединенные с ней ребрами. Сколько вершин у многогранника, столько будет и приписанных сфер, хотя некоторые из них могут совпадать. Покажем, что сферы, приписанные соседним вершинам, т.е. вершинам, являющимся концами одного ребра, обязательно совпадают при условии, что это ребро является общей стороной двух синих граней.

Пусть AB – такое ребро многогранника, а S_A и S_B – сферы, приписанные вершинам A и B . Заметим, что две окружности, описанные около двух граней, стороной которых является ребро AB , должны лежать как на сфере S_A , так и на сфере S_B . А это значит, что сферы S_A и S_B совпадают.

Если бы среди сфер, приписанных вершинам, нашлись несовпадающие, то нашлись бы несовпадающие сферы, приписанные соседним вершинам. Но этого не может быть, как показано выше. Значит, все приписанные сферы совпадают и являются сферой S , описанной вокруг многогранника.

Плоскость, которой принадлежит красная грань, пересекает сферу S по окружности, являющейся описанной окружностью для красной грани.

В.Произволов

Ф1698. На рисунке вы видите изображение идущих часов, полученное с помощью компьютерного сканера. Принцип его работы прост. Мощная лампа создает на сканируемом объекте узкую освещенную полоску, а отраженный свет попадает на набор фотодатчиков, которые расположены в виде линейки, параллельной этой полоске. И лампа, и линейка датчиков расположены на подвижной каретке. Каретка движется с постоянной скоростью, и датчики через равные интервалы времени передают в компьютер изображение. Таким образом, при перемещении каретки получается много «срезов» объекта, из которых и состоит изображение. Пользуясь данным изображением, определите направление и скорость движения каретки сканера, если длина секундной стрелки (от оси до острия) составляет 15 мм.



Направление сканирования определяется просто. Очевидно, что кривизна изображения стрелки максимальна там, где скорость каретки направлена вдоль стрелки. На рисунке максимальная кривизна соответствует точкам вблизи оси, причем стрелка в этот момент почти вертикальна. Следовательно, сканирование осуществлялось в вертикальном направлении. Проведем касательную к секундной стрелке в точке ее крепления к оси. Деление на циферблате, на которое «покажет» касательная, есть момент начала или конца сканирования стрелки (в зависимости от того, вверх или вниз движется каретка). В нашем случае касательная «уперлась» в деление, соответствующее 28 секундам, в то время как острие стрелки показывает 20 секунд. Значит, каретка сканера пересекла острие секундной стрелки раньше, чем ее ось, т.е. каретка двигалась от цифры «6» к цифре «12». Отсюда сразу же можно найти время Δt , за которое каретка просканировала стрелку:

$$\Delta t = 28 \text{ с} - 20 \text{ с} = 8 \text{ с}.$$

Теперь найдем скорость каретки. Расстояние, которое прошла каретка за время Δt , равно расстоянию от острия секундной стрелки до прямой, проходящей через ось и цифру «3» на циферблате. Обозначим его через L . На рисунке это расстояние составляет $L_1 = 11$ мм. Кроме того, длина секундной стрелки на рисунке равна $l_1 = 20$ мм, а по условию задачи истинная длина стрелки $l = 15$ мм.¹ Так как при увеличении рисунка все размеры изменились в одинаковое число раз (изображение не искажено), то справедлива пропорция

$$\frac{L}{L_1} = \frac{l}{l_1}.$$

¹ При воспроизведении рисунка в журнале масштаб изображения был несколько изменен, но это никак не сказалось на окончательном результате. (Прим. ред.)

Таким образом, скорость каретки сканера равна

$$v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{l}{l_1} \frac{L_1}{\Delta t} \approx 1 \text{ мм/с}.$$

А.Селиверстов

Ф1699. Очень легкая жесткая квадратная пластинка подвешена в горизонтальном положении на четырех одинаковых вертикальных нитях, прикрепленных к ее углам. Найдите ту область пластинки, куда можно положить точечный груз таким образом, чтобы все четыре нити в положении равновесия оказались натянутыми. Нити считать упругими, но очень слабо растяжимыми.

Введем прямоугольную систему координат с началом в одном из углов пластинки и направим координатные оси X и Y вдоль ее сторон. Нарисуем вид пластинки сверху (рис.1) и обозначим N_1, N_2, N_3 и N_4 силы натяжения

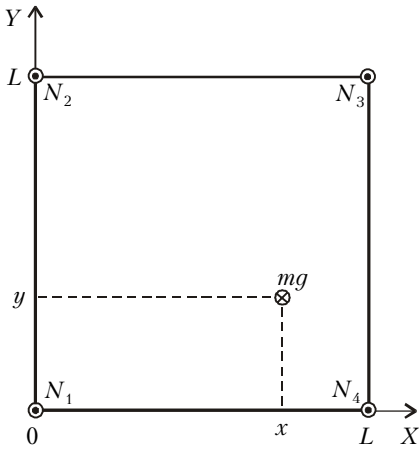


Рис.1

нитей, L – длину стороны пластинки, m – массу груза, x и y – координаты точки, где находится груз.

Запишем условия равновесия пластинки. Первое уравнение представляет собой условие равенства нулю суммы всех сил, действующих на пластинку:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = mg.$$

Далее, сумма моментов всех сил относительно осей, параллельных осям координат и проходящих через точку, в которой находится груз, также должна быть равна нулю. Отсюда имеем еще два уравнения:

$$(N_1 + N_4)y = (N_2 + N_3)(L - y),$$

$$(N_1 + N_2)x = (N_3 + N_4)(L - x).$$

Полученная система уравнений неполна. Для того чтобы получить еще одно уравнение, нужно найти, как связаны друг с другом величины малых деформаций нитей, возникших после того, как на пластинку положили груз. Пусть нити деформировались на величины $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ и Δl_4 соответственно. Тогда центр пластинки сместился на

$$h = \frac{1}{2}(\Delta l_1 + \Delta l_3) = \frac{1}{2}(\Delta l_2 + \Delta l_4).$$

Поскольку $N_i \sim \Delta l_i$ и все нити одинаковы, из последнего соотношения получаем недостающее уравнение:

$$N_1 + N_3 = N_2 + N_4.$$

Решив полученную систему, находим

$$N_3 = \frac{mg}{2} \left(\frac{x+y}{L} - \frac{1}{2} \right).$$

Так как по условию все нити натянуты, то $N_3 > 0$, т.е.

$$y > \frac{L}{2} - x.$$

Область пластинки, удовлетворяющая этому условию, изображена на рисунке 2.

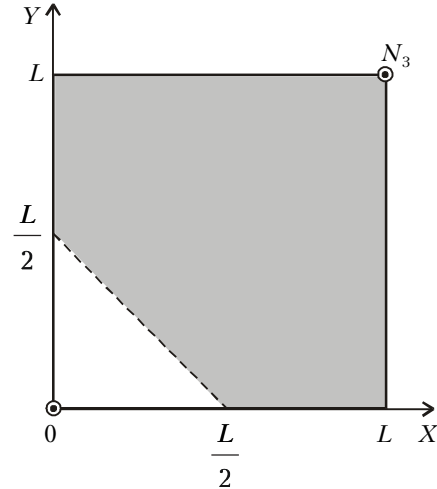


Рис.2

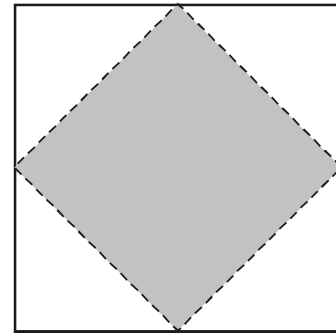


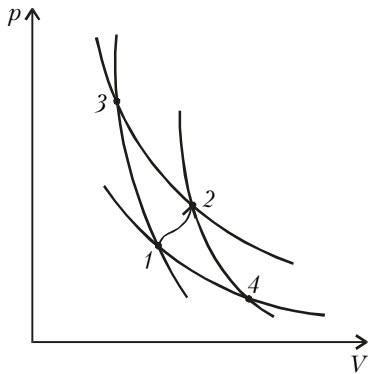
Рис.3

Поскольку все нити одинаковы и пластинка квадратная, из соображений симметрии следует, что область, в которую можно положить груз для того, чтобы все нити были натянуты, будет представлять собой квадрат с вершинами, находящимися в серединах сторон пластинки. Эта область изображена на рисунке 3.

Р.Компанец

Ф1700. Требуется перевести идеальный газ из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой $T_2 > T_1$ таким образом, чтобы температура в течение всего обратного процесса $1 \rightarrow 2$ не убывала, а тепло не отводилось от газа. Минимальное количество теплоты, которое передается газу в таком процессе, равно Q_1 . Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу при данных условиях проведения процесса?

Нарисуем координатную плоскость p, V и обозначим состояние с температурами T_1 и T_2 точками 1 и 2 соответственно (см. рисунок). Проведем через эти точки изотермы и адиабаты и обозначим точки их пересечения цифрами 3 и 4. Из условия задачи следует, что процесс $1 \rightarrow 2$,



в течение которого температура не убывает, а тепло не отводится от газа, возможен. Это означает, что точка 2 лежит справа от адиабаты, проходящей через точку 1. При этом график произвольного процесса $1 \rightarrow 2$, для которого выполняются условия задачи, лежит внутри цикла $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

Обозначим через Q_{12} , Q_{132} и Q_{142} количества теплоты, сообщаемые газу в процессах $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ соответственно. Рассмотрим процесс $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. В нем газ сначала получает количество теплоты Q_{132} , потом отдает Q_{12} , совершая при этом работу $Q_{132} - Q_{12}$, которая равна площади фигуры, ограниченной на диаграмме линиями $1-3$, $3-2$ и $2-1$. Так как эта площадь неотрицательна, то

$$Q_{132} \geq Q_{12}.$$

Рассмотрим аналогичным образом процесс $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Работа, которую совершает газ в этом процессе, также неотрицательна и равна $Q_{12} - Q_{142}$, откуда

$$Q_{12} \geq Q_{142}.$$

Из двух неравенств имеем

$$Q_{142} \leq Q_{12} \leq Q_{132}.$$

Поскольку процесс $1 \rightarrow 2$ – произвольный (из числа удовлетворяющих условию задачи), из последнего неравенства следует, что минимальное количество теплоты Q_1 , которое может передаваться газу в таком процессе, равно Q_{142} . Максимальное же количество теплоты Q_2 , которое может передаваться газу в данном процессе, из тех же соображений равно Q_{132} . Таким образом, для того чтобы получить ответ задачи, нужно рассмотреть цикл Карно $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, КПД которого равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{142}}{Q_{132}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

Отсюда, с учетом того, что $Q_{142} = Q_1$ и $Q_{132} = Q_2$, находим

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

О.Шведов

Ф1701. В настоящее время для проведения небольших сварочных работ иногда используют смесь водорода с кислородом, получаемую при электролизе воды. Оцените КПД устройства для электролиза воды, если напряжение между электродами одной его ячейки равно $U = 2$ В. Известно, что при сгорании $m = 2$ г водорода в кислороде выделяется $Q = 0,29$ МДж тепла.

При электролизе воды происходит поляризация электродов, в результате чего ячейка устройства становится гальваническим элементом. ЭДС этого элемента можно найти, полагая, что выделяющаяся при сгорании водорода энергия при электролизе должна быть затрачена на

совершение работы против сторонних электрических сил. В соответствии с законом электролиза Фарадея, для получения массы m водорода через ячейку должен протечь заряд

$$q = \frac{mZeN_A}{M},$$

где $Z = 1$ – валентность, $M = 1$ г/моль – атомарная масса водорода, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль – постоянная Авогадро. Поскольку при этом, как уже говорилось, должна быть совершена работа, численно равная Q , ЭДС элемента равна

$$E = \frac{Q}{q} = \frac{QM}{mZeN_A}.$$

Отсюда для КПД ячейки – он равен КПД соответствующего гальванического элемента – и всего устройства для электролиза воды получаем

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{затр}}} = \frac{qE}{qU} = \frac{QM}{mZeN_A U} \approx 0,75 = 75\%.$$

В.Погожев

Ф1702. Параллельные рельсы длиной $2L$ закреплены на горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга. К их концам подсоединены две одинаковые батареи с ЭДС E (рис.1). На рельсах лежит перемычка массой m , которая может поступательно скользить вдоль них. Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией B . Считая, что

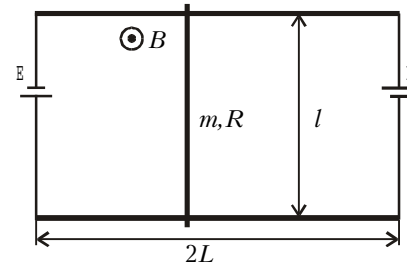


Рис.1

сопротивление перемычки равно R , а сопротивление единицы длины рельсов равно ρ , найдите период малых колебаний, возникающих при смещении перемычки от положения равновесия, пренебрегая затуханием, внутренним сопротивлением источников, сопротивлением контактов, а также индуктивностью цепи.

Вывясним сначала, где находится положение равновесия перемычки. Поскольку батареи имеют одинаковые ЭДС, при схеме их включения, показанной на рисунке 1, разность потенциалов между серединами рельсов равна нулю. Следовательно, если перемычка покоится по середине, ток через нее не протекает и на нее не действует сила Ампера. Значит, это положение и является положением равновесия перемычки. Отметим далее, что при движении перемычки через нее протекает ток, обусловленный как изменением омического сопротивления частей цепи, так и явлением электромагнитной индукции. По правилу Ленца, часть силы Ампера, связанная с индукционным током, приводит к затуханию колебаний (можно показать, что

эта часть силы пропорциональна скорости перемишки и является аналогом вязкого трения). Поэтому, в соответствии с условием задачи, ЭДС индукции при решении задачи можно пренебречь.

Введем прямоугольную систему координат с началом в

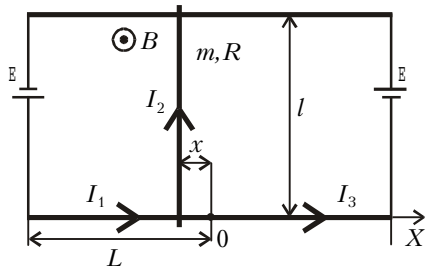


Рис.2

середине нижнего рельса и направим ось X вдоль него вправо (рис.2). Рассмотрим малое смещение перемишки вдоль оси X – например, влево. После того как перемишка сдвинется вдоль рельсов на расстояние x , в ней начнет протекать ток. Обозначим ток, текущий от левой батареи к началу координат, через I_1 , ток, ответвляющийся из начала координат в перемишку, через I_2 , ток, текущий от начала координат к правой батарее, через I_3 и запишем первый закон Кирхгофа:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Для контура, содержащего левую батарею и перемишку, а также для контура, содержащего правую батарею и

перемишку, запишем второй закон Кирхгофа:

$$2I_1\rho(L - x) + I_2R = \mathcal{E},$$

$$2I_3\rho(L + x) - I_2R = \mathcal{E}.$$

Решая полученную систему трех уравнений, найдем ток, текущий через перемишку:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}x}{\rho(L^2 - x^2) + RL} \approx \frac{\mathcal{E}x}{\rho L^2 + RL}$$

(поскольку колебания малые, $x^2 \ll L^2$). Так как перемишка находится в магнитном поле, на нее действует сила Ампера, равная

$$F_A = I_2 l B = \frac{\mathcal{E} l B x}{L(\rho L + R)}.$$

Эта сила направлена вправо, т.е. стремится вернуть перемишку в положение равновесия. Уравнение движения перемишки имеет вид

$$m a_x = - \frac{\mathcal{E} l B}{L(\rho L + R)} x.$$

Отсюда и находим период малых колебаний перемишки:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL(\rho L + R)}{\mathcal{E} l B}}.$$

А. Якута

НАША ОБЛОЖКА

(Окончание .

Начало см. на 4-й странице обложки)

Экспериментируя с любыми из перечисленных объектов – например, с сетками от электробритвы, кусочками прозрачной ткани, вырезанными из бумаги регулярными решетками и т.п., – можно установить некоторые закономерности, присущие муаровым узорам. Вот некоторые из них.

1) В опытах наблюдается эффект, называемый муаровым увеличением. Если в двух одинаковых регулярных сеточках период структуры очень малый, меняя взаиморасположение сеточек, удастся получить как бы увеличенное изображение отдельных ячеек сеточки и без труда определить вид ее структуры и тип симметрии. (Объясните, каким образом достигается увеличение в муаре.)

2) Муаровые узоры, как уже от-

мечалось, очень чувствительны к относительному перемещению сеточек. Это позволяет изготавливать прецизионные измерители линейных перемещений и поворотов. (Попробуйте оценить возможную чувствительность таких муаровых датчиков.)

3) Муаровые узоры пропадают, если сеточки имеют слишком разные периоды или если они расположены далеко друг от друга. (Подумайте, почему.) По муаровым узорам можно определять величину неизвестного периода структуры одной из сеточек, когда известен другой, и измерять величину зазора между сеточками. Теневые или зеркально отраженные картины от одной сеточки с достаточно малым шагом позволяют изучать качество или форму поверхности тела, на которой создается тень или которая служит зеркалом. Сравнительно просто проверить по муаровым узорам качество изготовления решеток,

сеточек и других регулярных структур на просвет.

4) Для электронно-оптических приборов, визуализирующих изображение, существует термин «муаровый предел разрешения», описывающий ограничения характеристик технических систем с дискретным набором регулярно расположенных фотодатчиков или световых волокон, по которым распространяется свет.

Несмотря на то, что эффект образования муара обсуждается в научной литературе еще со времен лорда Рэля, у муаровых узоров появляются все новые и новые приложения, включая тонкие вопросы метрологии и художественного оформления предметов, архитектурных сооружений, одежды и т.д.

А. Митрофанов