

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2000 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 – 99» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M1706» или «Ф1713». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M1706 и M1708 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде этого года.

Задачи M1706–M1710, Ф1713–Ф1717

M1706. Пусть AL и BM – биссектрисы треугольника ABC . Известно, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников ACL и BCM лежит на отрезке AB . Докажите, что $\angle ACB = 60^\circ$.

Е.Сопкина

M1707*. Квадрат клетчатой бумаги, состоящий из $n \times n$ клеток, разрезан на $2n$ прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже,

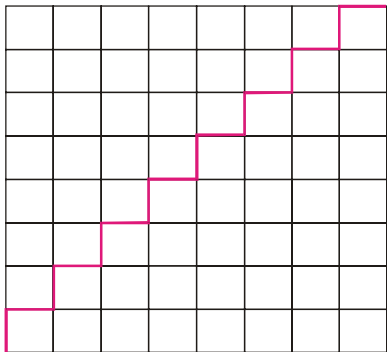


Рис.1

либо выше ступенчатой ломаной, разделяющей квадрат (рис.1). Докажите, что найдется клетка клетчатой бумаги, являющаяся одним из названных прямоугольников.

В.Произволов

M1708. Играют двое. Они по очереди пишут на доске делители числа $100!$, отличные от 1 (без повторений). Проигрывает тот игрок, после хода которого числа на

доске окажутся в совокупности взаимно просты. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его противник?

Д.Карпов

M1709. Окружность пересекает стороны прямоугольника в восьми точках, которые последовательно занумерованы. Докажите, что площадь четырехугольника с вершинами в точках с нечетными номерами равна площади

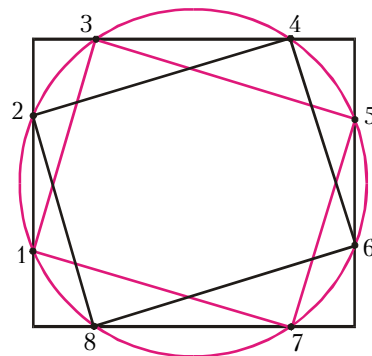


Рис.2

четырёхугольника с вершинами в точках с четными номерами (рис.2).

В.Произволов

M1710*. Пусть x, y, z, p, q, r – положительные числа такие, что $p + q + r = 1, x^p y^q z^r = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{p^2 x^2}{qy + rz} + \frac{q^2 y^2}{px + rz} + \frac{r^2 z^2}{px + qy} \geq \frac{1}{2}.$$

С.Калинин

Ф1713. Система состоит из большого тела массой M , к которому прикреплены два блока, и двух одинаковых гладких тел массой $M/5$ каждое (рис.3). Каким должен

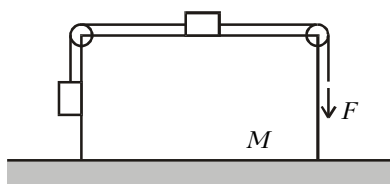


Рис.3

быть коэффициент трения между большим телом и поверхностью стола, чтобы это тело могло оставаться неподвижным при любых значениях направленной вертикально вниз силы

\vec{F} ? Нити считать легкими и нерастяжимыми, трение учитывать только между поверхностью стола и большим телом. Считайте, что за время решения этой задачи тела не успеют удариться о блоки.

З.Рафаилов

Ф1714. Внутри большого теплоизолированного сосуда находится 32 г кислорода, температура сосуда и кислорода 300 К, манометр показывает давление 1 атм. Еще внутри сосуда находится очень легкая капсула, содержащая 1 г гелия при температуре 500 К. Капсула лопается, и гелий выходит из нее в сосуд. Как будут меняться со временем показания манометра? Теплоемкость большого сосуда составляет 1000 Дж/К.

А.Теплов

Ф1715. Собрана схема из трех одинаковых батареек по 9 В и четырех одинаковых вольтметров (рис.4). Найдите показания приборов.

А.Повторов

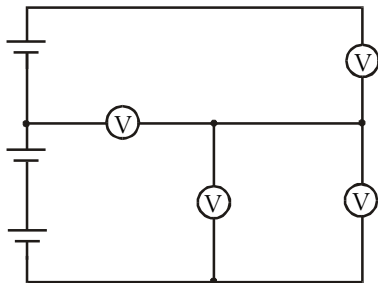


Рис.4

Ф1716. Две одинаковые катушки индуктивности расположены недалеко друг от друга. Одна из них подключена к источнику синусоидального переменного напряжения последовательно с амперметром, к концам другой катушки подключен второй амперметр. Амперметры показывают 1 А и 0,2 А (угадайте сами, какой из них показывает 1 А, а какой 0,2 А). Один из амперметров отключают (при отключении амперметра цепь разрывается). Что покажет после этого оставшийся амперметр? Катушки, приборы и источник можно считать идеальными. Сопротивление проводов пренебрежимо мало.

Р.Александров

Ф1717. На расстоянии $d = 0,6$ см от центра стеклянного шара радиусом $R = 1$ см находится точечный источник света. При каких значениях коэффициента преломления стекла n весь испускаемый источником световой поток выйдет наружу? Оцените долю вышедшего наружу потока при $n_1 = 1,6$. Снаружи – вакуум; источник излучает во все стороны равномерно.

А.Зильберман