

Геометрическая оптика

А. ЧЕШЕВ

ПРИ ОПИСАНИИ МНОГИХ ЯВЛЕНИЙ, связанных с распространением световых волн, удобно пользоваться простыми геометрическими представлениями световых волн в виде узкого пучка (луча), направление которого определяет направление распространения волн.

Световой пучок (луч), падающий на границу раздела двух сред, подчиняется закону отражения, согласно которому угол падения α равен углу отражения γ :

$$\alpha = \gamma,$$

и закону преломления, в соответствии с которым

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

где β – угол преломления, n_1 и n_2 – показатели преломления первой и второй сред соответственно.

Уникальным оптическим прибором, осуществляющим преобразование лучей, является линза. При этом справедлива так называемая формула линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d – расстояние от предмета до линзы, f – расстояние от линзы до даваемого ею изображения и F – ее фокусное расстояние.

А теперь – несколько конкретных задач.

Задача 1. В отверстие радиусом $R = 1$ см, сделанное в тонкой непрозрачной перегородке, вставлена рассе-

ивающая линза. По одну сторону перегородки на главной оптической оси линзы расположен точечный источник света. По другую сторону перегородки на расстоянии $L = 24$ см от нее находится экран. Радиус светлого пятна на экране равен $r_1 = 4$ см. Если линзу убрать, то радиус пятна на экране станет $r_2 = 2$ см. Определите расстояние от источника до линзы и фокусное расстояние линзы.

Пусть S – точечный источник, а S^* – его мнимое изображение в линзе (рис.1). По формуле линзы,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

где d – расстояние от источника S до

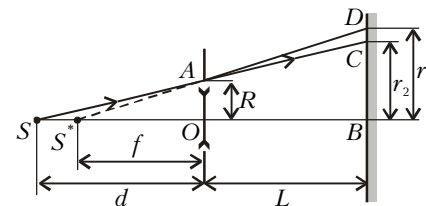


Рис. 1

линзы, f – расстояние от линзы до изображения S^* , F – фокусное расстояние

(Окончание см. на с. 34)

(Начало см. на с.31)

яние линзы. Из подобия треугольников SAO и SCB следует, что

$$\frac{d}{d+L} = \frac{R}{r_2}$$

Отсюда

$$d = \frac{L}{r_2/R - 1} = 24 \text{ см.}$$

Аналогично, из подобия треугольников S^*AO и S^*DB находим

$$f = \frac{L}{r_1/R - 1} = 8 \text{ см.}$$

Наконец, из формулы линзы для фокусного расстояния получаем

$$F = \frac{df}{d-f} = 12 \text{ см.}$$

Задача 2. Точечный источник света S расположен на расстоянии $d = 40$ см от собирающей линзы на ее главной оптической оси. Оптическая сила линзы $D = 5$ дптр. При повороте линзы на некоторый угол относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через оптический центр линзы, изображение источника сместилось на $\Delta l = 10$ см. Найдите угол поворота линзы.

Изображение (S^*) источника (рис.2) сначала расположено на главной опти-

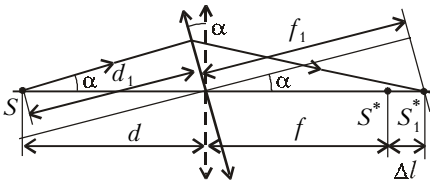


Рис. 2

ческой оси линзы на расстоянии f от линзы. По формуле линзы,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D,$$

откуда

$$f = \frac{d}{Dd - 1} = 0,4 \text{ м.}$$

При повороте линзы на угол α ее главная оптическая ось тоже поворачивается на угол α , а изображение (S_1^*) смещается на Δl . Из рисунка 2 видно, что $d_1 = d \cos \alpha$ и $f_1 = (f + \Delta l) \cos \alpha$. Формула линзы в этом случае примет вид

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D.$$

Отсюда для угла α находим

$$\cos \alpha = \frac{d + f + \Delta l}{Dd(f + \Delta l)} = 0,9,$$

и

$$\alpha = \arccos 0,9.$$

Задача 3. Шар из оптически прозрачного материала помещен в параллельный пучок света (рис.3). Угол падения одного из лучей на поверх-

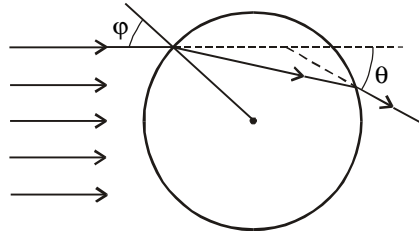


Рис. 3

ность шара $\varphi = \arctg(4/3)$, а угол его отклонения от первоначального направления после двух преломлений на поверхности шара $\theta = 2\arctg(7/24)$. Найдите показатель преломления материала шара.

Луч света $1A$ (рис.4), падающий на шар под углом φ , проходит в шаре по

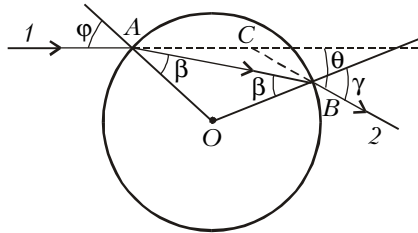


Рис. 4

линии AB , составляющей углы β с радиусами AO и BO , так что

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = n.$$

Для выходящего из шара луча $B2$ имеем

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{1}{n}.$$

Рассмотрим треугольник ABC . Очевидно, что он равнобедренный и угол θ является его внешним углом; следовательно,

$$\theta = 2(\varphi - \beta) = 2\arctg \frac{7}{24},$$

или

$$\tg(\varphi - \beta) = \frac{7}{24}.$$

Отсюда, используя известную тригонометрическую формулу $\tg(\varphi - \beta) = (\tg \varphi - \tg \beta)/(1 + \tg \varphi \tg \beta)$, получим

$$\tg \beta = \frac{3}{4}.$$

Окончательно, для показателя преломления находим

$$n = \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{\sqrt{1 + 1/\tg^2 \beta}}{\sqrt{1 + 1/\tg^2 \varphi}} = \frac{4}{3}.$$

Задача 4. Тонкая рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = 15$ см прикрепена к стенке аквариума, заполненного водой (показатель преломления воды $n = 4/3$). На линзу под углом α падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от ее оптического центра, не изменяет своего направления. Найдите h , если $\tg \alpha = 0,08$.

Проведем луч $1A$, падающий на линзу в точке A на расстоянии h от главной оптической оси, которая пересекается этим лучом в точке C на расстоянии d от линзы (рис.5). Из геометрии рисунка видно, что

$$d = \frac{h}{\tg \alpha}.$$

Если бы в аквариуме не было воды, то луч света после преломления линзой пошел бы в направлении $A2$. В случае заполненного водой аквариума, по условию задачи, он идет в направлении $A3$, не изменяя своего первоначаль-

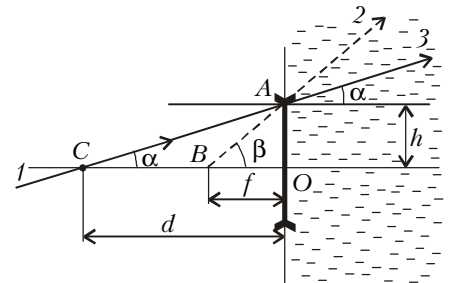


Рис. 5

ного направления. Пусть β – угол между лучом $A2$ и оптической осью линзы и $BO = f$. Очевидно, что $\sin \beta / \sin \alpha = n$, или, так как углы β и α маленькие,

$$\frac{\tg \beta}{\tg \alpha} = n.$$

Кроме того,

$$f = \frac{h}{\tg \beta}.$$

В соответствии с формулой линзы,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}.$$

Решая систему полученных четырех уравнений, для искомой величины получаем

$$h = F(n-1)\tg \alpha = 0,4 \text{ м} = 40 \text{ см.}$$

Задача 5. В комнате на столе лежит плоское зеркало, на котором находится тонкая плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см (рис.6). По потолку ползет муха со скоростью $v = 2$ см/с. Расстояние от потолка до зеркала $h = 220$ см. На каком расстоянии от зеркала находится изображение мухи

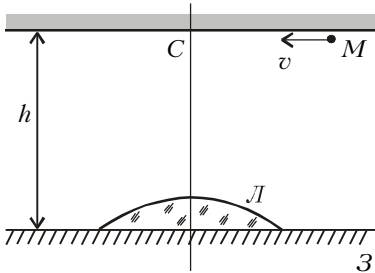


Рис. 6

в данной оптической системе? Чему равна скорость изображения мухи в тот момент, когда она пересекает главную оптическую ось линзы (в точке С)?

Построим изображение мухи в оптической системе линза – зеркало – линза. На рисунке 7 точка M_1 – первое изображение мухи, даваемое линзой, а M_2 – изображение мухи, даваемое линзой после отражения лучей от зеркала. Запишем формулу линзы для первого случая:

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{a} = \frac{1}{F}$$

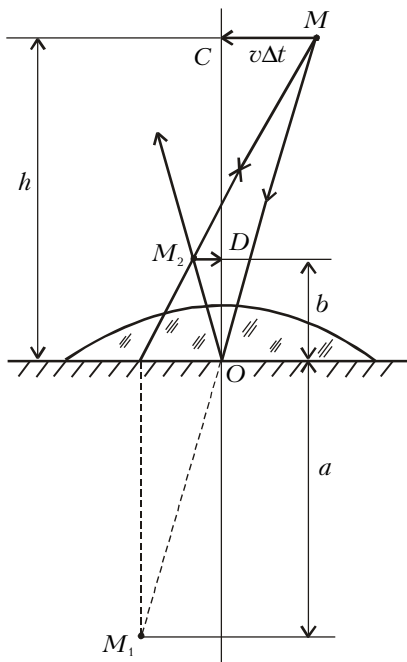


Рис. 7

и для второго:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$$

Отсюда находим искомое расстояние:

$$b = \frac{Fh}{2h - F} = 22 \text{ см.}$$

Из подобия треугольников OCM и ODM_2 имеем

$$\frac{CM}{DM_2} = \frac{v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{h}{b}$$

где u – скорость изображения мухи. Таким образом,

$$u = v \frac{b}{h} = 0,2 \text{ см/с.}$$

Задача 6. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см расположено плоское зеркальце на расстоянии $L = 3F$ от линзы (рис.8). Зеркальце вращается с угловой скоростью $\omega = 0,1 \text{ с}^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и

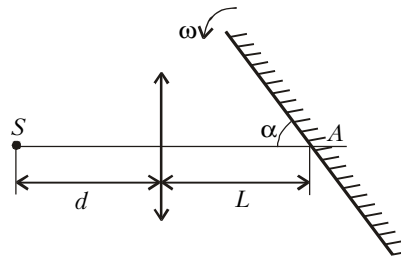


Рис. 8

проходящей через точку A . На расстоянии $d = 5F/4$ от линзы находится точечный источник света S . На каком расстоянии от точки A получится изображение источника в системе линза – зеркальце в результате однократного прохождения лучей от источника через линзу? Найдите скорость (модуль и угол между вектором скорости и главной оптической осью) этого изображения в момент, когда угол между плоскостью зеркальца и главной оптической осью $\alpha = 60^\circ$.

Построение изображения источника в данной оптической системе показано на рисунке 9. Здесь S_1 – изображение источника, даваемое линзой, S_2 – изображение «источника» S_1 в зеркальце. Из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

находим

$$f = \frac{Fd}{d - F} = 5F = 100 \text{ см.}$$

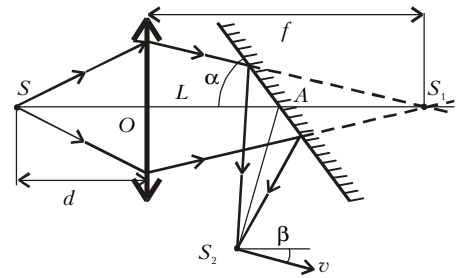


Рис. 9

Из соображений симметрии $AS_2 = AS_1$, а $AS_1 = f - L$. Отсюда находим искомое расстояние:

$$AS_2 = f - L = 2F = 40 \text{ см.}$$

Вектор скорости изображения \vec{v} перпендикулярен отрезку AS_2 и с оптической осью составляет угол

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2} = 30^\circ.$$

Модуль скорости изображения равен

$$v = \frac{\Delta\beta}{\Delta t} AS_2 = 2 \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} AS_2 =$$

$$= 2\omega \cdot 2F = 8 \text{ см/с.}$$

Упражнения

1. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 15$ см прикреплена к стенке аквариума, заполненного водой ($n = 4/3$). На линзу под углом α падает параллельный пучок света. Известно, что луч, прошедший сквозь линзу на расстоянии h от ее оптического центра, не изменяет своего направления. Найдите угол α , если $h = 5$ мм.

2. Точечный источник света расположен на главной оптической оси рассеивающей линзы в ее фокусе. Оптическая сила линзы $D = 4$ дптр. На какое расстояние сместится изображение источника, если линзу повернуть на угол $\alpha = 30^\circ$ относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через оптический центр линзы?

3. На главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см расположено плоское зеркальце на расстоянии $L = 4,2F$ от линзы (см. рис.8). Зеркальце вращается с угловой скоростью $\omega = 0,05 \text{ с}^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку A . На расстоянии $d = 4F$ от линзы находится точечный источник света S . На каком расстоянии от точки A получится изображение источника в системе линза – зеркальце в результате однократного прохождения лучей от источника через линзу? Найдите скорость (модуль и угол между вектором скорости и главной оптической осью) этого изображения в момент, когда угол между плоскостью зеркальца и главной оптической осью $\alpha = 40^\circ$.