Напомним, что N – общее число игроков, а квадратные скобки служат для обозначения целой части числа.

При доказательстве можно воспользоваться задачей 1. Но не обязательно.

б) Для произвольного $N \geq 4$ и произвольного натурального $K \leq [N/2] - 1$ постройте пример, когда число странных равно K.

Пусть на турнире отсутствуют средние игроки (т.е. не странные, но набравшие столько же очков). Тогда появляются новые ограничения на количество странных и их положение в таблице результатов. (Это выглядит парадоксально: отсутствие одних ограничивает других. Дело, конечно, в том, что игрок бывает странным не сам по себе, а в зависимости от того, как сыграли другие – с ним и между собой.)

Задача 5. *а) Докажите, что на любом турнире сильные вместе со странными составляют меньше 2/3 от общего числа игроков, и что то же верно для слабых вместе со странными.*

Если же на турнире нет средних, то сильные и слабые составляют более чем по трети участников турнира, а странные – менее трети. Более точно, если N имеет вид $3M$, $3M + 1$ или $3M + 2$ (M натуральное), то число странных не превосходит, соответственно, $M - 2$, $M - 1$, M.

Отсюда вытекает решение задачи о богатырях, с которой мы начали, а также задачи 2б).

б) Постройте пример (для произвольного $N \geq 5$), когда на турнире есть странные, нет средних, а число сильных, как и число слабых, равно наименьшему целому, большему $N/3$.

Когда же появляются странные?

Наличие в турнире странных игроков показывает, что его участников трудно упорядочить по силе. В этих условиях естественно ожидать, что будет много совпадающих результатов. Например, в решении задачи 2а) встретилась такая ситуация: в турнирной таблице есть странные игроки, причем заняты лишь первое и последнее места и на одном из них – два игрока. Возникает вопрос: может ли быть странный участник на турнире, где набрали поровну все, кроме одного? Отрицательный ответ вытекает из следующего факта (может быть, уже известного вам):

Задача 6. *Если в круговом турнире все участники, кроме одного, получили одинаковое число очков, то этот участник либо у всех выиграл, либо всем проиграл. Докажите это.*

Решение. Пусть «нестандартный» участник набрал больше очков, чем «стандартные». Результат «среднеарифметического» участника составляет $(N-1)/2$. Недобор «стандартного» участника до этого количества не может быть меньше $1/2$, поэтому «стандартные» вместе не добрали не менее чем $(N-1)/2$ очков. «Нестандартный» должен на столько же превысить средний уровень, т.е. он получил не меньше $N - 1$ очков. Это возможно лишь в случае, когда «нестандартный» у всех выиграл.

Аналогично разбирается случай, когда «нестандартный» набрал меньше, чем «стандартные».

Что же наблюдается в противоположном случае, когда любые два игрока набрали разное количество очков? Если при этом нет ничьих, то участники турнира «выстраиваются в цепочку»: занявший первое место выиграл у всех, занявший второе – у всех, кроме первого, и т.д. (если вам не был известен этот факт, то докажите его в качестве **задачи 6′**). В таком случае, конечно, странных нет. Однако для их появления требуется не так уж много:

Задача 7. *а) Пусть в круговом турнире все участники набрали разное количество очков. Постройте пример, когда ровно две ничьих и имеется странный игрок.*

Естественно возникает вопрос, возможен ли странный игрок в ситуации, промежуточной между условиями задач 6′ и 7а), т.е. при одной ничьей. Ответ отрицательный, причем доказать его гораздо труднее, чем во всех предыдущих случаях. Этой задачей мы и закончим знакомство с турнирными парадоксами:

б) В круговом турнире была только одна ничья. Любые два участника набрали разное количество очков. Докажите, что странных игроков нет.

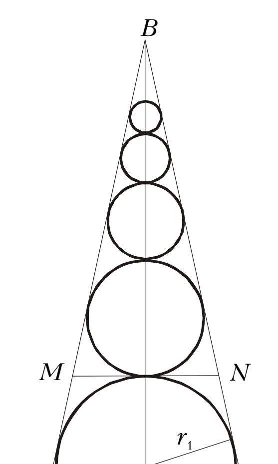
НАМ ПИШУТ

Метод размерностей в геометрии

Задача. *Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$, $\angle B = 2\alpha$. Высота, опущенная на основание, равна h. В треугольник вписана окружность. Вторая окружность касается первой окружности и боковых сторон треугольника. Третья окружность касается второй окружности и боковых сторон треугольника и т.д. до бесконечности. Найдите сумму площадей всех получившихся кругов.*

Традиционное решение основано на рассмотрении окружностей, вписанных в подобные треугольники. Сумма площадей всех кругов получается как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поступим по-другому.

Из соображений размерностей площадь всех кругов можно выразить формулой $S_{(ABC)} = fh^2$, где f – некоторый неизвестный безразмерный коэффициент. Для его отыскания проведем отрезок MN, который касается первой окружности и параллелен основанию треугольника. Очевидно, что для кругов, вписанных в треугольник MBN, справедлива та же формула для суммы их площадей с заменой, разумеется,



высоты h на высоту треугольника MBN: $S_{(MBN)} = f(h - 2r_1)^2$, где r_1 – радиус первого круга. Ясно, что площадь всех кругов, вписанных в треугольник ABC, равна сумме площадей первого круга и всех кругов, вписанных в треугольник MBN: $fh^2 = \pi r_1^2 + f(h - 2r_1)^2$.

Радиус первого круга равен $r_1 = \dfrac{h \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$. Получим уравнение относительно неизвестной величины f; его решение $f = \dfrac{\pi \sin\alpha}{4}$. Следовательно, сумма площадей всех кругов, вписанных в треугольник ABC, равна $S = \dfrac{\pi}{4} h^2 \sin\alpha$.

А. Колодочко