М1688*. *Дана функция* $f(x)=\left(x^2+ax+b\right)/\left(x^2+cx+d\right)$, *где трехчлены* x^2+ax+b *и* x^2+cx+d *не имеют общих корней. Докажите, что два утверждения равносильны:*
1) найдется числовой интервал, свободный от значений $f(x)$;
2) $f(x)$ *представима в виде* $f(x)=f_1\left(f_2\left(\ldots f_{n-1}\left(f_n(x)\ldots\right)\right)\right)$, *где каждая из функций* $f_i(x)$ *есть функция одного из видов:* k_ix+m_i, x^{-1}, x^2.

Поскольку квадрат функции принимает только неотрицательные значения, появляется интервал, свободный от значений функции.

С другой стороны, если есть интервал, свободный от значений функции f, тогда есть и интервалы, свободные от значений f^{-1}, $kf+m$. Поэтому, если f – суперпозиция функций вида x^2, x^{-1} и $kx+m$, то найдется интервал, свободный от значений f.

Теперь покажем, что если есть интервал, свободный от значений f, то f можно представить в виде искомой композиции. Для начала сведем задачу к случаю, когда множество значений f ограничено. В самом деле, пусть f не принимает значений из интервала $\left(x_0, x_0+\varepsilon\right)$, тогда функция

$$\left(f(x)-\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^{-1}<2\varepsilon^{-1}$$

ограничена.

Теперь рассмотрим пространство квадратных трехчленов x^2+px+q, где каждый квадратный трехчлен задается парой параметров (p, q).

Рассмотрим дискриминантную параболу $p^2=4q$. Для таких трехчленов $D=0$ и $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$. Область внутри параболы отвечает множеству трехчленов с отрицательным дискриминантом, область вне – с положительным.

Если дробь $\dfrac{x^2+p_1x+q_1}{x^2+p_2x+q_2}$ несократима и определена при всех x, то знаменатель $x^2+p_2x+q_2$ не обращается в ноль и, стало быть, имеет отрицательный дискриминант (это означает, что соответствующая точка в пространстве трехчленов лежит внутри дискриминантной параболы). Теперь решение задачи вытекает из того факта, что прямая не может содержаться целиком внутри параболы, и следующих вспомогательных утверждений.

1. Пусть $X_1\left(p_1,q_1\right)$ и $X_2\left(p_2,q_2\right)$ – точки в пространстве параметров и пусть точки $X_3\left(p_3,q_3\right)$ и $X_4\left(p_4,q_4\right)$ лежат на прямой X_1X_2, тогда

$$\frac{x^2+p_3x+q_3}{x^2+p_4x+q_4}=\frac{\alpha\varphi+\beta}{\gamma\varphi+\delta},$$

где $\varphi=\dfrac{x^2+p_1x+q_1}{x^2+p_2x+q_2}$.

Доказательство. Поскольку точки X_3 и X_4 лежат на прямой X_1X_2, найдутся такие μ, ν, что

$$p_3=\mu p_1+(1-\mu)p_2,\ q_3=\mu q_1+(1-\mu)q_2,$$

$$p_4=\nu p_1+(1-\nu)p_2,\ q_4=\nu q_1+(1-\nu)q_2.$$

Тогда

$$\frac{x^2+p_3x+q_3}{x^2+p_4x+q_4}=$$

$$=\frac{\mu\left(x^2+p_1x+q_1\right)+(1-\mu)\left(x^2+p_2x+q_2\right)}{\nu\left(x^2+p_1x+q_1\right)+(1-\nu)\left(x^2+p_2x+q_2\right)}=\frac{\mu\varphi+(1-\mu)}{\nu\varphi+(1-\nu)},$$

что и требовалось.

2. Дробно-линейную функцию $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ можно представить в виде композиции функций вида $kx+m$ и x^{-1}.

Доказательство. Можно считать, что $\gamma\neq 0$. Вычитая константу из дроби, сводим задачу к случаю, когда $\alpha=0$. Обращая такую дробь, приходим к линейной функции.

А.Белов, Г.Челноков

М1689. *Арифметическая прогрессия из натуральных чисел содержит не менее трех членов, их произведение – делитель некоторого числа* n^2+1.
а) Докажите, что существует такая прогрессия с разностью 12.
б) Докажите, что такой прогрессии с разностью 10 или 11 не существует.
в) Какое наибольшее число членов может содержать такая прогрессия с разностью 12?*

а) Рассмотрим числа 1, 13, 25; для них $5^2+1=13\cdot 2$, $7^2+1=25\cdot 2$. Число 57^2+1 делится на $13\cdot 25$: к этому легко придти непосредственно, а общий метод см. ниже.

б) Из трех чисел a, $a+10$, $a+20$ одно делится на 3, а n^2+1 на 3 не делится.

Случай разности 11 рассматривается аналогично.

в) Ни один из членов прогрессии не делится на 7, ибо на 7 не делится n^2+1. Значит, из семи членов прогрессии (если бы такая была) можно было бы выбрать два, разность которых делится на 7. Получили противоречие: $k\cdot 12$ кратно 7 (пишут: $k\cdot 12\ \vdots\ 7$), где $0<k<7$.

Докажем, что прогрессия из шести членов есть:

$$(5,\ 17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 65).$$

Нам нужно доказать существование такого числа n, что n^2+1 делится на

$$5\cdot 17\cdot 29\cdot 41\cdot 53\cdot 65=(25)\cdot 17\cdot 29\cdot 41\cdot 53\cdot 13. \qquad (*)$$

Каждое из шести чисел в правой части $(*)$ обладает нужным свойством:

$$(7+25x)^2+1\ \vdots\ 25,\ (4+17y)^2+1\ \vdots\ 17,$$

$$(12+29z)^2+1\ \vdots\ 29,\ (9+41u)^2+1\ \vdots\ 41,$$

$$(23+53v)^2+1\ \vdots\ 53\ \text{(так как } 23^2+1=530\text{)},$$

$$(5+13w)^2+1\ \vdots\ 13.$$

Теперь нам понадобится предложение, известное как «китайская теорема об остатках».

Теорема. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ – натуральные числа, каждые два из которых взаимно просты, $r_1, \ldots, r_m$ – произвольные целые числа. Тогда существуют целые числа $x_1, \ldots, x_m$ такие, что

$$a_1x_1+r_1=\ldots=a_mx_m+r_m.$$