Задачи по атомной и ядерной физике

В.МОЖАЕВ

В НАЧАЛЕ НАШЕГО (УЖЕ УХОДЯщего) века было установлено, что атом любого химического элемента состоит из положительно заряженного ядра и окружающей его электронной оболочки, электроны которой обращаются вокруг ядра под действием электрических сил. Линейные размеры ядер порядка $10^{-13}-10^{-12}$ см, а размеры самих атомов, определяемые электронными оболочками, примерно в 10^5 раз больше. Несмотря на малый относительный размер ядра, почти вся масса атома (99,95%) сосредоточена именно в нем. Это связано с тем, что электронная оболочка состоит только из электронов (e), а в состав ядра входят значительно более тяжелые протоны (p) и нейтроны (n): $m_p = 1836{,}15\ m_e$, $m_n = 1836{,}68\ m_e$.

Если строение и свойства электронной оболочки определяются электрическим полем ядра атома, то внутри ядра между нуклонами (протонами и нейтронами) действуют так называемые ядерные силы, которые в сотни раз более сильные, чем электромагнитные.

Атом является чисто квантово-механической системой. Однако и для таких систем выполняются фундаментальные законы сохранения полной энергии и импульса.

А теперь – несколько конкретных задач, в основе которых лежат именно законы сохранения.

Задача 1. *На какое минимальное расстояние r могут сблизиться при лобовом столкновении центры α-частицы с кинетической энергией $T = 6$ МэВ и неподвижного ядра золота? Порядковый номер золота $Z_{\mathrm{Au}} = 79$, а его массовое число $A_{\mathrm{Au}} = 197$.*

Будем рассматривать процесс лобового столкновения α-частицы с ядром золота в системе координат, в которой ядро золото первоначально покоилось. Очевидно, что при максимальном сближении α-частицы и ядра в этой системе координат они будут двигаться как единое целое с некоторой скоростью v. Запишем законы сохранения полной энергии и импульса для данной системы частиц. Поскольку кинетическая энергия α-частицы много меньше ее энергии покоя ($m_\alpha c^2 = 3730$ МэВ), полную энергию α-частицы (а тем более ядра золота) можно записать в нерелятивистском виде: как сумму энергии покоя и кинетической энергии.

Полная энергия системы наших частиц, когда они были на большом удалении друг от друга, равна

$$E_1 = m_\alpha c^2 + T + M_{\mathrm{Au}} c^2 ,$$

а импульс этой системы равен

$$p_1 = \sqrt{2 m_\alpha T} ,$$

где m_α – масса α-частицы (т.е. ядра атома гелия), M_{Au} – масса ядра золота, c – скорость света. В момент максимального сближения полная энергия системы составляет

$$E_2 = m_\alpha c^2 + M_{\mathrm{Au}} c^2 + \frac{1}{2}\left(m_\alpha + M_{\mathrm{Au}}\right) v^2 + \frac{Z_{\mathrm{He}} Z_{\mathrm{Au}} e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} ,$$

где e – заряд электрона, r – расстояние между частицами. Импульс же составляет

$$p_2 = \left(m_\alpha + M_{\mathrm{Au}}\right) v .$$

Законы сохранения энергии и импульса будут иметь вид

$$T = \frac{1}{2}\left(m_\alpha + M_{\mathrm{Au}}\right) v^2 + \frac{Z_{\mathrm{He}} Z_{\mathrm{Au}} e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} ,$$

$$\sqrt{2 m_\alpha T} = \left(m_\alpha + M_{\mathrm{Au}}\right) v .$$

Из совместного решения этих уравнений найдем минимальное расстояние между частицами:

$$r = \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_{\mathrm{Au}}}\right)\frac{Z_{\mathrm{He}} Z_{\mathrm{Au}} e^2}{4\pi\varepsilon_0 T} = \left(1 + \frac{A_{\mathrm{He}}}{A_{\mathrm{Au}}}\right)\frac{Z_{\mathrm{He}} Z_{\mathrm{Au}} e^2}{4\pi\varepsilon_0 T} \approx 3{,}9 \cdot 10^{-12}\ \text{см} .$$

Задача 2. *Используя модель Бора для атома водорода, найдите дискретные уровни энергий и классические радиусы орбит электрона для водородоподобного атома (водородоподобным атомом называют ион с зарядом ядра Ze, вокруг которого вращается один электрон). Вычислите потенциал ионизации для атома водорода и радиус первой боровской орбиты.*

Пусть масса ядра иона $M_я$, а масса электрона m_e. Между ионом и электроном действует электростатическая сила, и они вращаются по круговым орбитам относительно их общего центра масс. Если радиус орбиты ядра $r_я$, а радиус орбиты электрона r_e, то эти радиусы связаны между собой соотношением

$$M_я r_я = m_e r_e . \qquad (1)$$

Уравнение движения электрона в системе центра масс имеет вид

$$\frac{m_e v_e^2}{r_e} = \frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)^2} , \qquad (2)$$

где v_e – скорость электрона. Отсюда следует, что кинетическая энергия электрона равна

$$T_e = \frac{m_e v_e^2}{2} = \frac{Z e^2 r_e}{8\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)^2} .$$

Аналогично, для ядра получаем

$$T_я = \frac{M_я v_я^2}{2} = \frac{Z e^2 r_я}{8\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)^2} .$$

Тогда суммарная кинетическая энергия иона составляет

$$T = T_e + T_я = \frac{Z e^2}{8\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)} .$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия между ядром и электроном равна

$$U = -\frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)} ,$$

а полная энергия иона –

$$E = T + U = -\frac{Z e^2}{8\pi\varepsilon_0 \left(r_e + r_я\right)} . \qquad (3)$$

До сих пор мы пользовались чисто классическими представлениями. Теперь воспользуемся правилом квантования момента импульса для нашего иона: суммарный момент импульса системы электрон–ядро кратен постоянной Планка $\hbar$, т.е.

$$m_e v_e r_e + M_я v_я r_я = n\hbar,$$

где n = 1, 2, 3... Поскольку импульс иона равен нулю, $m_e v_e = M_я v_я$ и, следовательно,

$$m_e v_e \left(r_e + r_я\right) = n\hbar. \qquad (4)$$

Исключая скорость электрона v_e из уравнений (2) и (4), найдем возможные значения радиусов орбит электрона:

$$r_{en} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2 m_e} n^2, \qquad (5)$$

а из уравнений (1) и (5) найдем возможные радиусы орбит ядра:

$$r_{яn} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2 M_я} n^2.$$

Если говорить об орбитах электрона в системе координат, связанной с ядром, то

$$r_n = r_{en} + r_{яn} = \\ = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2 \dfrac{m_e M_я}{m_e + M_я}} n^2 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Ze^2\mu} n^2, \qquad (6)$$

где $\mu = \dfrac{m_e M_я}{m_e + M_я}$ – так называемая приведенная масса. Подставляя полученное выражение (6) в формулу (3), получим дискретные значения полной энергии стационарных состояний иона:

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Потенциалом ионизации атома называют минимальную энергию, необходимую для перевода атома из нормального состояния (n = 1) в несвязанное состояние ($n \to \infty$). Для атома водорода Z = 1, $\mu = \dfrac{m_e m_p}{m_e + m_p}$, где m_p – масса протона, поэтому потенциал ионизации атома водорода равен

$$E_i = \frac{m_e m_p e^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \left(m_e + m_p\right)\hbar^2} \approx 13{,}55 \text{ эВ},$$

а радиус первой боровской орбиты (боровский радиус) –

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2\left(m_e + m_p\right)}{e^2 m_e m_p} \approx 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Заметим, что боровский радиус и потенциал ионизации атома водорода являются характерными масштабами длины и энергии в атомных системах.

Задача 3. *Позитроний представляет собой связанную систему из электрона и позитрона, вращающихся вокруг их центра масс. (Позитроний образуется при столкновении медленных нейтронов с атомами вещества и захвате позитроном атомного электрона.) Найдите уровни энергии, энергию ионизации и минимальное расстояние между электроном и позитроном для позитрония.*

Будем рассматривать позитроний как водородоподобный атом и воспользуемся результатами, полученными в предыдущей задаче. Для позитрония Z = 1, а приведенная масса $\mu = m_e/2$ (масса позитрона равна массе электрона), поэтому выражение для энергетических уровней позитрония примет вид

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{4\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда для энергии ионизации позитрония (при $n \to \infty$) получим

$$E_i = \frac{m_e e^4}{4\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 \hbar^2} \approx 6{,}77 \text{ эВ}.$$

Минимальное расстояние между электроном и позитроном найдем из выражения (6) для радиусов боровских орбит (при n = 1):

$$r_{\min} = \frac{8\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Задача 4. *Термоядерная реакция* ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \to {}^4_2\text{He} + {}^1_1p$ *идет с выделением энергии* Q_1 *= 18,4 МэВ (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину* Q_1 *больше кинетической энергии исходных). Какая энергия* Q_2 *выделится в реакции* ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \to {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1p$*, если дефект масс ядра* ${}^3_2\text{He}$ *на* ΔM *= 0,006 а.е.м. больше, чем у ядра* ${}^2_1\text{H}$*?*

Масса покоя любого ядра всегда меньше суммы масс покоя входящих в его состав нуклонов (протонов и нейтронов). Для количественной характеристики этого эффекта вводится специальная величина, называемая дефектом масс, – разность между суммой масс нуклонов, входящих в состав ядра, и массой самого ядра. В ядерной физике массы частиц принято измерять в энергетических единицах. Заданная в условии задачи величина ΔM = 0,006 а.е.м. соответствует энергии ΔMc^2 = 5,589 МэВ.

Дефект масс ядра гелия-3 (${}^3_2\text{He}$) равен

$$\Delta M_3 = 2m_p + m_n - M_3,$$

где m_p – масса протона, m_n – масса нейтрона, а M_3 – масса ядра гелия-3. Аналогично запишем дефект масс ядра дейтерия с массой M_2:

$$\Delta M_2 = m_p + m_n - M_2.$$

Из этих уравнений получим

$$\Delta M_3 - \Delta M_2 = \Delta M = m_p + M_2 - M_3.$$

Теперь рассмотрим данные термоядерные реакции. Так как число нуклонов в обеих реакциях не изменяется, энерговыделение в реакциях обусловлено изменением дефектов масс участвующих в реакции ядер. Закон сохранения энергии запишем в виде

$$M_2c^2 + M_3c^2 = M_4c^2 + m_pc^2 + Q_1,$$

$$M_3c^2 + M_3c^2 = M_4c^2 + 2m_pc^2 + Q_2,$$

где M_4 – масса ядра гелия-4. Вычитая уравнения одно из другого, найдем искомую энергию:

$$Q_2 = Q_1 - \left(m_pc^2 + M_2c^2 - M_3c^2\right) = \\ = Q_1 - \Delta Mc^2 \approx 12{,}8 \text{ МэВ}.$$

Задача 5. *Ядерная реакция* ${}^4\text{He} + {}^{14}\text{N} \to {}^{17}\text{O} + p$ *может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота* α*-частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию* $E_п$ *= 1,45 МэВ. На сколько энергия* α*-частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся протонов могла быть равной нулю? Рассмотрите нерелятивистский случай.*

Поскольку данная реакция может идти только при энергиях, превышающих пороговую, это означает, что реакция идет с поглощением энергии (такие реакции называются эндотермическими). Очевидно, что в этом случае энергия покоя продуктов реакции больше энергии покоя исходных частиц. Обозначим эту разность через Q и назовем энергией реакции.

Рассмотрим случай, когда налетающая α-частица обладает кинетической энергией, равной пороговой энергии $E_п$, т.е. когда $p_\alpha^2/\left(2m_\alpha\right) = E_п$, где p_α – импульс α-частицы, а m_α – ее масса. В этом случае продукты реакции будут двигаться как единое целое, т.е. с одной и той же скоростью, которую обозначим через u. Запишем закон сохранения энергии:

$$E_п = \frac{M_O u^2}{2} + \frac{m_p u^2}{2} + Q$$

и закон сохранения импульса:

$$\sqrt{2m_\alpha E_п} = \left(M_O + m_p\right)u,$$

где M_O – масса ядра атома кислорода, а m_p – масса протона. Исключая из уравнений скорость u, получим

$$Q = E_п\left(1 - \frac{m_\alpha}{M_O + m_p}\right).$$

Пусть теперь кинетическая энергия α-частицы T_α больше $E_п$, а образовавшийся в результате реакции протон неподвижен. Законы сохранения энергии и импульса в этом случае будут иметь вид

$$T_\alpha = \frac{M_O v^2}{2} + Q, \quad \sqrt{2m_\alpha T_\alpha} = M_O v,$$

где v – скорость ядра атома кислорода. После исключения из этих уравнений скорости v, получим

$$T_\alpha = Q\frac{M_O}{M_O - m_\alpha} = E_п\frac{M_O\left(M_O + m_p - m_\alpha\right)}{\left(M_O - m_\alpha\right)\left(M_O + m_p\right)}.$$

Энергия α-частицы будет больше пороговой энергии на величину

$$T_\alpha - E_п = E_п\frac{m_\alpha m_p}{\left(M_O - m_\alpha\right)\left(M_O + m_p\right)} \approx 0{,}025 \text{ МэВ}.$$

Задача 6. *В настоящее время в природном уране содержится $\eta_1 = 99{,}28\%$ урана-238 и $\eta_2 = 0{,}72\%$ урана-235. Вычислите возраст Земли в предположении, что в момент ее образования количества обоих изотопов урана были одинаковыми. Периоды полураспадов ядер ^{238}U и ^{235}U равны, соответственно $\tau_1 = 4{,}56 \cdot 10^9$ лет и $\tau_2 = 0{,}71 \cdot 10^9$ лет.*

Воспользуемся основным законом радиоактивного распада

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau},$$

где $N(t)$ – число нераспавшихся ядер через произвольное время t после начала отсчета, N_0 – число нераспавшихся ядер в момент начала отсчета, τ – период полураспада данных ядер. В нашем случае за начало отсчета времени мы выбираем момент образования Земли. Пусть N_0 – число ядер каждого изотопа в природном уране на момент образования Земли, тогда число этих ядер в настоящий момент t равно

$$N_1(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau_1} \text{ и } N_2(t) = N_0 \cdot 2^{-t/\tau_2}.$$

Поделив одно равенство на другое, получим

$$\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = 2^{t\left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right)}.$$

Прологарифмировав обе части данного уравнения, найдем возраст Земли:

$$t = \frac{\ln(\eta_1/\eta_2)}{\ln 2}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ лет}.$$

Упражнения

1. В 1989 году впервые наблюдалось образование протониума – атома, состоящего из протона и антипротона (частица с массой протона и зарядом, равным по величине и по знаку заряду электрона). Определите энергию излучения, соответствующую переходу протониума из состояния с $n = 2$ в состояние с $n = 1$.

2. При слиянии протона и ядра трития образуются α-частица (ядро атома гелия) и γ-квант: $^1_1H + {}^3_1H \to {}^4_2He + \gamma$. Дефект масс ядра ^4_2He составляет 0,0304 а.е.м. (1 а.е.м. соответствует энергии 931,5 МэВ). Кинетическая энергия частиц, образующихся в реакции $^3_1H + {}^3_1H \to {}^4_2H + 2{}^1_0n$, на 11,3 МэВ больше кинетической энергии исходных частиц. Определите энергию, уносимую γ-квантом в первой реакции. Кинетическими энергиями протона, ядра трития и α-частицы можно пренебречь.

3. При захвате нейтрона ядром лития $^6Li + n = {}^3H + {}^4He$, в которой выделяется энергия $Q = 4{,}8$ МэВ. Найдите распределение кинетической энергии между продуктами реакции. Кинетическую энергию исходных частиц считайте пренебрежимо малой.

4. Определите энергию, уносимую за 1 час α-частицами, получающимися при распаде 1 г радия (^{226}Rd), если скорость α-частиц равна $1{,}51 \cdot 10^9$ см/с, а период полураспада радия составляет 1602 года.