Задачи по атомной и ядерной физике

1. $\Delta E = \dfrac{3m_p e^4}{16(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} \approx 9{,}36$ кэВ. **2.** $E_\gamma \approx 19{,}81$ МэВ.

3. $T_\text{т} = \dfrac{m_\alpha Q}{m_\alpha + M_\text{т}} \approx 2{,}74$ МэВ, $T_\alpha = \dfrac{M_\text{т} Q}{m_\alpha M_\text{т}} \approx 2{,}06$ МэВ.

4. $T = 100$ Дж.

XXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

Заключительный этап

9 класс

1. *Ответ*: 9.

Заметим, что $9A = 10A - A$. При вычитании этих чисел столбиком ни в одном разряде, кроме младшего, не приходится занимать единицу из следующего разряда. Таким образом, сумма цифр разности равна разности сумм цифр чисел $10A$ и A (которые равны) плюс 9.

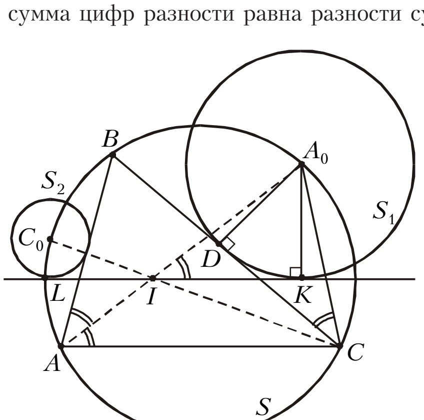

Рис. 2

3. Из точки I проведем касательную IK к окружности S_1 так, чтобы луч IK пересекал меньшую дугу A_0C (рис.2). Аналогичным образом проведем касательную IL к окружности S_2. Биссектриса AI угла BAC делит дугу BC на 2 равные дуги. Поэтому точки A, I, A_0 лежат на одной прямой. Аналогично, на одной прямой лежат точки C, I и C_0. Из равенств

$$\angle ICA_0 = \angle C_0CA_0 = \frac{1}{2}\overset{\smile}{C_0BA_0} = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{C_0B} + \overset{\smile}{BA_0}\right),$$

$$\angle A_0IC = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC_0} + \overset{\smile}{A_0C}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{C_0B} + \overset{\smile}{BA_0}\right)$$

следует, что $\angle A_0IC = \angle ICA_0$ и $A_0I = A_0C$.

Далее, пусть D – середина отрезка BC, тогда S_1 касается BC в точке D.

В прямоугольных ΔA_0KI и ΔA_0DC катеты A_0K и A_0D равны и $A_0I = A_0C$ по доказанному выше. Следовательно, $\Delta A_0KI = \Delta A_0DC$. Отсюда $\angle A_0IK = \angle A_0CD = \angle A_0CB$. Но $\angle A_0CB = \angle A_0AB$ (теорема о вписанном угле), и $\angle A_0AB = \angle A_0AC$. Значит, $\angle A_0IK = \angle A_0AC$, следовательно, прямая IK параллельна AC. Аналогично, $IL \parallel AC$, следовательно, L, I, K лежат на одной прямой, параллельной AC.

4. *Ответ*: можно. Приведем решение Ильи Межирова.

Рассмотрим граф, n вершин которого – n натуральных чисел, а ребро соединяет числа a и b тогда и только тогда, когда a и b не взаимно просты. Докажем индукцией по n, что перекрасить числа в белый цвет можно при любых числах в вершинах. База индукции ($n = 1$) очевидна.

Пусть перекрасить n чисел можно; докажем, что это можно сделать для $n + 1$. Для любых n вершин данного графа по предположению индукции существует способ, перекрашивающий эти n вершин; что при этом происходит с $(n + 1)$-й вершиной, неизвестно. Если для некоторых n вершин после применения этого способа $(n + 1)$-я вершина тоже перекрашивается, то требуемое доказано: применяя этот способ, перекрашиваем все вершины. Рассмотрим оставшийся случай: для любых n вершин графа мы можем перекрасить их, не перекрашивая $(n + 1)$-ю.

Заметим, что если добиться нечетного числа белых вершин, то требуемое будет доказано. В самом деле, для каждой из этих белых вершин по очереди произведем перекрашивание всех вершин, кроме нее. Белые вершины перекрасятся четное число раз и останутся белыми, а черные вершины перекрасятся нечетное число раз и станут белыми.

Рассмотрим два случая:

1) Вершин четное число. Перекрасим все, кроме одной, и получим нечетное число вершин.

2) Вершин нечетное число. Так как в любом графе количество вершин, из которых выходит нечетное число ребер, четно, то в данном графе существует вершина, из которой выходит четное число ребер. Перекрасим эту вершину и соединенные с ней и получим нечетное число белых вершин.

Требуемое доказано.

5. *Ответ*: $n(n + 1)$.

Общее количество отрезков длины 1 равно $3 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$. Все отрезки, параллельные двум сторонам большого треугольника, не образуют треугольников, так как любой треугольник состоит из отрезков, параллельных всем трем сторонам. Следовательно, $\dfrac{2}{3} \cdot \left(3 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$ отрезков длины 1 отметить можно.

Докажем, что большее количество отрезков отметить нельзя. Закрасим треугольники со стороной 1, как показано на рисунке 3. Треугольники содержат все отрезки длины 1, причем каждый отрезок принадлежит ровно одному треугольнику. Для того чтобы не образовался ни один из закрашенных треугольников, в каждом из них можно отметить не более двух отрезков. Значит, количество выделенных отрезков не превышает $\dfrac{2}{3}$ от их общего числа.

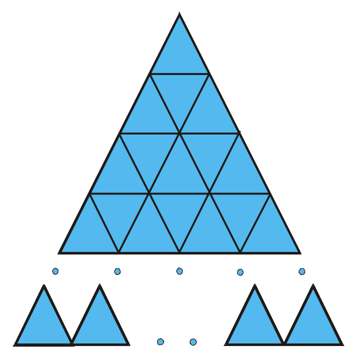

Рис. 3

7. Заметим, что $\angle BCF = 180° - \angle BEF = \angle AEF$, аналогично, $\angle EAF = \angle FDC$, значит, $\Delta AEF \sim \Delta DCF$ (рис.4). Пусть K и L – середины отрезков AE и CD соответственно. Тогда $\angle AKF = \angle FLB$ как углы между медианой и основанием в подобных треугольниках, поэтому точки B, K, F, L лежат на одной окружности. Но так как серединные перпендикуляры к отрезкам AE и CD пересекаются в точке O, то точки K и L лежат на окружности с диаметром BO. Но тогда и точка F лежит на этой окружности, и $\angle BFO$ – прямой.

8. Докажем, что выигрывает Петя. Мысленно разобьем контакты на четыре одинаковые группы A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Петя будет отвечать на любой ход Васи

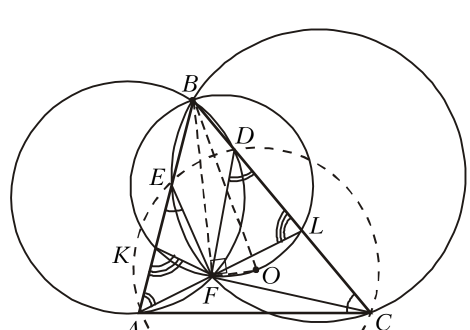

Рис. 4