2. К натуральному числу A приписали справа три цифры. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до A. Найдите A.

И.Акулич

3. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым AB, BC, CA. Определите, в каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC.

А.Шаповалов

4. Имеется 40 газовых баллонов, значения давления газа в которых нам неизвестны и могут быть различны. Разрешается соединять любые баллоны друг с другом в количестве, не превосходящем заданного натурального числа k, а затем разъединять их; при этом давление газа в соединяемых баллонах устанавливается равным среднему арифметическому давлений в них до соединения. При каком наименьшем k существует способ уравнивания давлений во всех 40 баллонах независимо от первоначального распределения давлений в баллонах?

И.Акулич

5. Докажите, что числа от 1 до 15 нельзя разбить на две группы: A из 2 чисел и B из 13 чисел так, чтобы сумма чисел в группе B была равна произведению чисел в группе A.

Н.Агаханов

6. Дан нетупоугольный треугольник ABC. Точка A_1 симметрична вершине A относительно прямой BC, а точка C_1 симметрична вершине C относительно прямой AB. Докажите, что если точки A_1, B и C_1 лежат на одной прямой и $C_1B = 2A_1B$, то угол CA_1B – прямой.

Н.Агаханов

7. В коробке лежит полный набор костей домино. Два игрока по очереди выбирают из коробки по одной кости и выкладывают их на стол, прикладывая к уже выложенной цепочке с любой из двух сторон по правилам домино. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

Д.Храмцов

8. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов полностью закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

А.Шаповалов

9 класс

1. По кругу выписаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до N, $N \geq 2$. При этом для любой пары соседних чисел имеется хотя бы одна цифра, встречающаяся в десятичной записи каждого их них. Найдите наименьшее возможное значение N.

Д.Кузнецов

2. В треугольнике ABC на стороне AC нашлись такие точки D и E, что $AB = AD$ и $BE = EC$ (E между A и D). Точка F – середина дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что точки B, E, D, F лежат на одной окружности.

С.Берлов

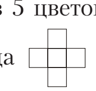
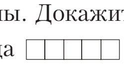
3. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что если $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z$, то для натурального k выполнено неравенство

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k.$$

С.Злобин

4. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке 1×1 которого нарисована одна из четырех стрелок (вверх, вниз, вправо, влево). Верхняя сторона правой верхней клетки – выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90° по часовой стрелке. Если фишка должна сделать ход, выводящий ее за пределы квадрата 8×8, она остается на месте, а стрелка также поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

М.Антонов

5. Все клетки клетчатой плоскости окрашены в 5 цветов так, что в любой фигуре вида  все цвета различны. Докажите, что в любой фигуре вида  все цвета различны.

С.Берлов

6. См. задачу 7 для 8 класса.

7. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается 1 раз. Например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

8. В треугольнике ABC ($AB > BC$) K и M – середины сторон AB и AC, O – точка пересечения биссектрис. Пусть P – точка пересечения прямых KM и CO, а точка Q такова, что $QP \perp KM$ и $QM \parallel BO$. Докажите, что $QO \perp AC$.

М.Сонкин

10 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω, и точка B ($B \neq A$). Рассматриваются всевозможные треугольники BXY такие, что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY, лежат на одной прямой.

П.Кожевников

3. В пространстве даны n точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой, никакие четыре не лежат в одной плоскости). Через каждые три из них проведена плоскость. Докажите, что какие бы $n - 3$ точки в пространстве ни взять, найдется плоскость из проведенных, не содержащая ни одной из этих $n - 3$ точек.

В.Дольников, С.Игонин

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Существуют ли 10 различных целых чисел таких, что все суммы, составленные из 9 из них, – точные квадраты?

Р.Садыков, Е.Черепанов

6. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, AC и BC в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Пусть K – точка на окружности, диаметрально противоположная точке C_1, D – точка пересечения прямых B_1C_1 и A_1K. Докажите, что $CD = CB_1$.

М.Евдокимов

7. Каждый голосующий на выборах вносит в избирательный бюллетень фамилии n кандидатов. На избирательном участке находится $n + 1$ урна. После выборов выяснилось, что в каждой урне лежит по крайней мере один бюллетень и при всяком выборе $(n+1)$-го бюллетеня по одному из каждой урны найдется кандидат, фамилия которого встречается в каждом из выбранных бюллетеней. Докажите, что по крайней мере в одной урне все бюллетени содержат фамилию одного и того же кандидата.

В.Дольников

8. Некоторые натуральные числа отмечены. Известно, что на каждом отрезке числовой прямой длины 1999 есть отмеченное число. Докажите, что найдется пара отмеченных чисел, одно из которых делится на другое.

С.Берлов