

До сих пор мы пользовались чисто классическими представлениями. Теперь воспользуемся правилом квантования момента импульса для нашего иона: суммарный момент импульса системы электрон-ядро кратен постоянной Планка  $\hbar$ , т.е.

$$m_e v_e r_e + M_{\text{я}} v_{\text{я}} r_{\text{я}} = n\hbar,$$

где  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Поскольку импульс иона равен нулю,  $m_e v_e = M_{\text{я}} v_{\text{я}}$  и, следовательно,

$$m_e v_e (r_e + r_{\text{я}}) = n\hbar. \quad (4)$$

Исключая скорость электрона  $v_e$  из уравнений (2) и (4), найдем возможные значения радиусов орбит электрона:

$$r_{en} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 m_e} n^2, \quad (5)$$

а из уравнений (1) и (5) найдем возможные радиусы орбит ядра:

$$r_{\text{ян}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 M_{\text{я}}} n^2.$$

Если говорить об орбитах электрона в системе координат, связанной с ядром, то

$$r_n = r_{en} + r_{\text{ян}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 \frac{m_e M_{\text{я}}}{m_e + M_{\text{я}}}} n^2 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 \mu} n^2, \quad (6)$$

где  $\mu = \frac{m_e M_{\text{я}}}{m_e + M_{\text{я}}}$  — так называемая приведенная масса. Подставляя полученное выражение (6) в формулу (3), получим дискретные значения полной энергии стационарных состояний иона:

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Потенциалом ионизации атома называют минимальную энергию, необходимую для перевода атома из нормального состояния ( $n = 1$ ) в несвязанное состояние ( $n \rightarrow \infty$ ). Для атома водорода  $Z = 1$ ,  $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$ , где  $m_p$  — масса протона, поэтому потенциал ионизации атома водорода равен

$$E_i = \frac{m_e m_p e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 (m_e + m_p) \hbar^2} \approx 13,55 \text{ эВ},$$

а радиус первой боровской орбиты (боровский радиус) —

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 (m_e + m_p)}{e^2 m_e m_p} \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Заметим, что боровский радиус и потенциал ионизации атома водорода являются характерными масштабами длины и энергии в атомных системах.

**Задача 3.** *Позитроний представляет собой связанную систему из электрона и позитрона, вращающихся вокруг их центра масс. (Позитроний образуется при столкновении медленных нейтронов с атомами вещества и захвате позитроном атомного электрона.) Найдите уровни энергии, энергию ионизации и минимальное расстояние между электроном и позитроном для позитрония.*

Будем рассматривать позитроний как водородоподобный атом и воспользуемся результатами, полученными в предыдущей задаче. Для позитрония  $Z = 1$ , а приведенная масса  $\mu = m_e/2$  (масса позитрона равна массе электрона), поэтому выражение для энергетических уровней позитрония примет вид

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{4(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда для энергии ионизации позитрония (при  $n \rightarrow \infty$ ) получим

$$E_i = \frac{m_e e^4}{4(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \approx 6,77 \text{ эВ}.$$

Минимальное расстояние между электроном и позитроном найдем из выражения (6) для радиусов боровских орбит (при  $n = 1$ ):

$$r_{\text{min}} = \frac{8\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \approx 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

**Задача 4.** *Термоядерная реакция  ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{p}$  идет с выделением энергии  $Q_1 = 18,4 \text{ МэВ}$  (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину  $Q_1$  больше кинетической энергии исходных). Какая энергия  $Q_2$  выделится в реакции  ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{p}$ , если дефект масс ядра  ${}^3_2\text{He}$  на  $\Delta M = 0,006 \text{ а.е.м.}$  больше, чем у ядра  ${}^2_1\text{H}$ ?*

Масса покоя любого ядра всегда меньше суммы масс покоя входящих в его состав нуклонов (протонов и нейтронов). Для количественной характеристики этого эффекта вводится специальная величина, называемая дефектом масс, — разность между суммой масс нуклонов, входящих в состав ядра, и массой самого ядра. В ядерной физике массы частиц принято измерять в энергетических единицах. Заданная в условии задачи величина  $\Delta M = 0,006 \text{ а.е.м.}$  соответствует энергии  $\Delta M c^2 = 5,589 \text{ МэВ}$ .

Дефект масс ядра гелия-3 ( ${}^3_2\text{He}$ ) равен

$$\Delta M_3 = 2m_p + m_n - M_3,$$

где  $m_p$  — масса протона,  $m_n$  — масса нейтрона, а  $M_3$  — масса ядра гелия-3. Аналогично запишем дефект масс ядра дейтерия с массой  $M_2$ :

$$\Delta M_2 = m_p + m_n - M_2.$$

Из этих уравнений получим

$$\Delta M_3 - \Delta M_2 = \Delta M = m_p + M_2 - M_3.$$

Теперь рассмотрим данные термоядерные реакции. Так как число нуклонов в обеих реакциях не изменяется, энерговыделение в реакциях обусловлено изменением дефектов масс участвующих в реакции ядер. Закон сохранения энергии запишем в виде

$$M_2 c^2 + M_3 c^2 = M_4 c^2 + m_p c^2 + Q_1,$$

$$M_3 c^2 + M_3 c^2 = M_4 c^2 + 2m_p c^2 + Q_2,$$

где  $M_4$  — масса ядра гелия-4. Вычитая уравнения одно из другого, найдем искомого энергию:

$$Q_2 = Q_1 - (m_p c^2 + M_2 c^2 - M_3 c^2) = Q_1 - \Delta M c^2 \approx 12,8 \text{ МэВ}.$$

**Задача 5.** *Ядерная реакция  ${}^4_2\text{He} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + p$  может идти, если налетающие на неподвижные ядра азота  $\alpha$ -частицы имеют энергию, превышающую пороговую энергию  $E_n = 1,45 \text{ МэВ}$ . На сколько энергии  $\alpha$ -частиц должна быть больше пороговой, чтобы кинетическая энергия образующихся протонов могла быть равной нулю? Рассмотрите нерелятивистский случай.*

Поскольку данная реакция может идти только при энергиях, превышающих пороговую, это означает, что реакция идет с поглощением энергии (такие реакции называются эндотермическими). Очевидно, что в этом случае энергии покоя продуктов реакции больше энергии покоя исходных частиц. Обозначим эту разность через  $Q$  и назовем энергией реакции.

Рассмотрим случай, когда налетающая  $\alpha$ -частица обладает кинетической энергией, равной пороговой энергии  $E_n$ , т.е. когда  $p_\alpha^2 / (2m_\alpha) = E_n$ , где  $p_\alpha$  — импульс  $\alpha$ -частицы, а  $m_\alpha$  — ее масса. В этом случае продукты реакции будут двигаться как единое целое, т.е. с одной и той же скоростью, которую обозначим через  $u$ . Запишем закон сохранения энергии:

$$E_n = \frac{M_0 u^2}{2} + \frac{m_p u^2}{2} + Q$$