

каждую букву а на АА, б – на ББ, в – на АБ. Получим слово

ААББАБААББАБААББАБ ... ААББАБ ...

Самые длинные палиндромы в этом слове – АББА и БААБ – имеют длину 4. Рассмотрев любое n -буквенное подслово этого слова, получаем неравенство $f(n) \geq n/4$. Значит, отношение $n/f(n)$ ограничено сверху числом 4.

А теперь – самое интересное. По-видимому, верна следующая теорема.

Теорема 2. При любом натуральном n имеем $f(3n) = n + 1$, $f(3n + 1) = n + 1$, $f(6n + 2) = 2n + 2$. При любом натуральном $n > 1$ имеем $f(6n + 5) = 2n + 2$, исключительное значение $f(11) = 5$.

Следствие. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{f(n)}$ существует и равен 3.

К сожалению, доказательство этой теоремы требует довольно большого перебора. Но главная идея может быть изложена довольно-таки коротко: *каждое слово из n букв А и Б может быть разбито не более чем на $\lfloor (n + 4)/3 \rfloor$ палиндромов.*

Это легко доказать по индукции: база очевидна, а переход состоит в следующем. Если мы от слова сумеем отрезать начало длиной $3s$ или более, которое можно разбить на s палиндромов, то мы победили. Поэтому будем рассматривать только слова, в которых этого сделать нельзя. Довольно скучный перебор показывает, что есть всего одна неприятная возможность – это

АБААББ(БААБАБ)(БААБАБ)...

где БААБАБ'ы бесконтрольно размножаются. С этим словом надо разобраться индивидуально. (Прodelайте эту работу!)

К сожалению, неравенства

$$f(n) \leq \lfloor (n + 4)/3 \rfloor \quad (3)$$

недостаточно для доказательства теоремы 2. Нужно еще убедиться, что при $n = 6k + 5$, где $k > 1$, неравенство строгое.

При $n \leq 17$ это верно. Если $n > 17$, то рассмотрим начало n -буквенного слова – первые его 6 букв. Будем считать, что слово начинается на букву А. Если начало можно разбить не более чем на 2 палиндрома, то все в порядке. Значит, осталось рассмотреть только те начала, которые в таблице были отмечены восклицательными знаками: 1) АБАББ, 2) ААББАБ, 3) АБААББ, 4) АБАББА и 5) АББАБА.

Начнем с третьего случая: АБА–АББ. Знак «–» указывает место для разбиения во всех ситуациях, кроме той, когда после этого начала идут одни только буквы Б. (Это очень важное соображение, и потому я прошу задержаться взглядом на этом месте и хорошо все обдумать.) Поскольку слово АБААББ...ББ можно разбить на 3 палиндрома, что прекрасно согласуется с неравенством (3), третий случай разобран.

Аналогично, в пятом случае: АББА–БА. Знак «–» указывает место для разбиения во всех ситуациях, кроме той, когда после этого начала идут только буквы А. Слово АББАБА...АА можно разбить на 3 палиндрома, и это согласуется с неравенством (3).

В четвертом случае припишем к началу АБАББА всевозможными способами шестибуквенные слова:

АБА+ББ+ААААААА
 А+БАБ+БААААААБ
 А+БАБ+БАААААБ+А

 АБА+ББ+АБББББА
 А+Б+АББА+ББББББ

Многоочия стоят потому, что в журнале никак нельзя привести все слова, хотя для доказательства я перебирал все подряд!

Аналогично рассматриваем второй случай:

А+АББА+Б+АААААА
 А+АББА+БАААААБ
 АА+ББ+АБААААБА

 АА+ББ+АББББББА
 А+АББА+БББББББ

Осталось рассмотреть первый случай:

АА+БАБ+Б+АААААА
 АА+БАБ+БАААААБ
 АА+БАБ+БААААБ+А
 А+АБА+ББААААБ
 АА+Б+АББА+ААБАА
 АА+БАБ+БААААБ–АБ
 АА+БАБ+БААААБ–БА

 АА+Б+АБББББББА
 АА+БАБ+БББББББ

При этом обнаруживается, что все слова поддаются разбиению, кроме двух: ААБАБББАААБА и ААБАБББААБАБ. Если приписать к первому из них букву А, то получаем АА+Б+АБББА+ААБАА. Если же приписать букву Б, то получим слово ААБАБББАААБАБ, с которым надо разбираться всерьез:

АА+БАБ+ББ+АААБАБААА+АА
 АА+БАБ+ББ+АААБАБААА–АБ

 АА+БАБ+Б+БААААБ+АБББББА
 АА+БАБ+Б+БААААБ–АББББББ

Мы победили слово ААБАБББАААБА! Осталось (непобедимое!) слово ААБАБББААБАБ. Справиться с ним мешает периодически продолжаемое слово ААБАБББААБАББААБАББААБАББААБАБ... Как с ним быть – не знаю.

Но если удастся разобраться с этим, останется выписать для каждого натурального n слово длиной n , которое нельзя разбить менее чем на указанное в теореме 2 число палиндромов – и доказательство будет закончено! К сожалению, я не представляю, как завершить это доказательство без крайне утомительного перебора.

Упражнения

12. Придумайте слово из букв А и Б, которое нельзя разбить менее чем на 3 палиндрома, но которое после приписывания к нему справа или слева любой из букв А и Б можно разбить на два палиндрома.

13. Для каждого $n = 1, 2, 3, \dots, 21$ укажите слово длиной n из букв А и Б, которое нельзя разбить менее чем на $f(n)$ палиндромов.

Примечание. Познакомившись с рукописью этой статьи, И.Акулич чистосердечно раскаялся в своих заблуждениях и поклялся в дальнейшем и близко не подходить к компьютерам. Он признал удивительную интуицию учителя физики В. Боева, который, едва ознакомившись с третьей задачей, сразу заявил, хотя и бездоказательно: «Предел равен трем».

В заключение неисправимый грешник добавил: «Представляете, чего мог бы достичь лорд Рэлей, если бы у него был «Пентиум»?!»

Послесловие

Понятно, что цель «компьютеризации» школьного образования – поручить компьютеру решение скучных и трудоемких задач, сохраняя время для более важных дел. При этом открывается путь – «изучать (науку), обучая (компью-