следуют неравенства

$$1 > \frac{a_{2m}}{a_{2m-1}} > \frac{2m}{2m+1},$$

из которых легко получить формулу (2).

Упражнение 11. а) Обычно в учебниках формула Валлиса имеет вид

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\ldots$$

Выведите ее из формулы (2).

б) Проверьте, что формула Валлиса может быть записана также в виде

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2\cdot 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}.$$

Чудеса в решете

Давайте чуть изменим правила решета Акулича и будем вычеркивать из натурального ряда сначала каждое второе число, потом каждое четвертое из оставшихся чисел, затем каждое шестое, и так далее. Получится последовательность 1, 3, 5, 9, 11, 17, 19, 25, 27, 35, 37, 43, 51, 57, 59, 69, 75, 83, 85, 97, 101, 113, 117, 129, ... Угадали закономерность? Наверное, еще нет. На компьютере можно вычислить огромное число членов этой последовательности. Например, ее 6700-й член оказался равен 589459. По-прежнему ничего не понятно? Ну тогда я признаюсь, что $589459\big/\left(6700\cdot\sqrt{6700}\right) \approx$ $\approx 1{,}0748$. И вообще, эта последовательность растет не как n^2, а как $n\sqrt{n}$.

Аналогичный порядок роста появляется, если вычеркивать из натурального ряда сначала каждое третье число, потом каждое пятое из оставшихся, потом каждое седьмое, и так далее. Невычеркнутыми при этом останутся числа 1, 2, 4, 5, 8, 10, 13, 16, 19, 20, 26, 28, 32, 34, 41, 43, 47, 53, 58, 61, 68, 70, 73, 80, 86, 88, 94, 101, ... Хотите знать, почему n-й член последовательности приблизительно равен $0{,}684n\sqrt{n}$? Тогда есть два пути: либо обзавестить суперкомпьютером и вычислять, вычислять, вычислять, ничего строго так и не доказав, ибо натуральный ряд целиком невозможно поместить в память никакого компьютера, либо подумать, как рассуждения предыдущих разделов переносятся на эти и другие случаи.

Оказывается, теоретические рассуждения позволяют найти ответ в общем случае. К сожалению, в этот ответ входит изобретенная Л.Эйлером гамма-функция Г. Ее определение слишком сложно, чтобы излагать его здесь. Поверьте на слово: истинная причина возникновения числа π в решете Акулича — в том, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Палиндромы

– Абба а?
– Абба аббабба.
– Бааб?
– Аа. Абба аббабба баабааб.

Палиндром (по-русски, *перевертыш*) – это слово, которое выглядит одинаково при чтении как слева направо, так и справа налево (например, ШАЛАШ, РОТОР или АААББАББАББААА).

Через $f(n)$ обозначим такое наименьшее число, что всякое слово длиной n, составленное из букв А и Б, может быть разбито не более чем на $f(n)$ палиндромов. Чтобы привыкнуть к функции f, давайте найдем $f(6)$. Всего шестибуквенных слов $2^6 = 64$, но поскольку буквы А и Б равноправны, достаточно рассмотреть только слова, начинающиеся на букву А:

АААААА	ААБАА+А	АБА+ААА	АББА+АА
ААААА+Б	АА+БААБ	А+БАААБ	АА+БААБ
ААА+АБА	А+АБАБА	АБА+АБА	АББА+Б+А !
АААА+ББ	АА+БАБ+Б !	АБА+А+ББ !	АББА+ББ
А+ААБАА	ААББАА	АБАБА+А	АБББА+А
ААА+БАБ	А+АББА+Б !	АБАБА+Б	АБББА+Б
АА+АББА	А+АББВА	АБА+ББ+А !	АББББА
ААА+БББ	АА+ББББ	АБА+БББ	А+БББББ

Восклицательными знаками отмечены слова, которые нельзя разбить менее чем на три палиндрома. Мы видим, что всякое шестибуквенное слово можно разбить не более чем на три палиндрома[4]; $f(6) = 3$.

В статье «Ум хорошо, а пять – лучше» приведены первые 19 значений функции f:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4
$n/f(n)$	1	1	1,5	2	2,5	2	2,33	2	2,25	2,5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$f(n)$	5	5	5	6	6	6	6	7	7	
$n/f(n)$	2,2	2,4	2,6	2,33	2,5	2,66	2,83	2,57	2,71	

Одиннадцатиклассники В.Иофик и В.Лемпицкий составили программу, которая вычислила несколько следующих значений функции f:

n	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$f(n)$	8	8	8	8	9	9	10	10	10	10
$n/f(n)$	2,5	2,62	2,75	2,87	2,66	2,77	2,6	2,7	2,8	2,9

Величину $f(28)$ эта программа вычисляла более 30 часов, а $f(29)$ – трое суток. Дальше я ей считать не дал – выключил компьютер. Потом они усовершенствовали свою программу, но все равно даже $f(60)$ вычислить перебором абсолютно невозможно: $2^{60} = 1024^6 > 10^{18}$. Если перебирать каждую секунду сто миллионов ($=10^8$) слов, то потребуется более 10^{10} секунд. Это значительно превышает гарантийный срок работы «Пентиума»!

Величина $n/f(n)$ – это средняя длина палиндромов, на которые разбито самое трудно разбиваемое n-буквенное слово. Как видно из таблицы, эта величина имеет тенденцию к росту. «Может ли величина $n/f(n)$ быть сколь угодно большой?» – спрашивает Акулич и, поскольку на этот вопрос не могут ответить ни счетные палочки, ни абак, ни «Пентиум», взывает: «Одна надежда – на читателей. Возможно, кто-нибудь сумеет составить такую программу, которая вычислит значения $f(n)$ для нескольких сотен первых n, анализируя которые, удастся правильно спрогнозировать ее поведение и найти предел (если он существует, конечно). А может, есть и чисто теоретический путь?»

Есть чистый путь! Давайте рассмотрим слово абвабвабв ... ... абв, состоящее из многократно повторенного слова абв. Оно может быть разбито на палиндромы единственным образом – рассыпано на отдельные буквы. Теперь заменим

---

[4] *Здесь я должен просить прощения у ревнителей чистоты русского языка: конечно, не очень складно говорить, что всякий палиндром можно разбить на один палиндром, ибо никакого разбиения при этом на деле не происходит. Но такова уж привычка математиков – стараться одной фразой охватить все случаи.*